UC3M
Optimización Matemática para la Economía
Examen Final Extraordinario 2 de julio de 2024 **Soluciones**

$\boxed{1}$

Se considera el conjunto

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1,\ y \geq \frac{3}{4}(x-1),\ y \leq \frac{x}{x-1} \right\}.$$

(a) (10 puntos) Representar gráficamente el conjunto A.

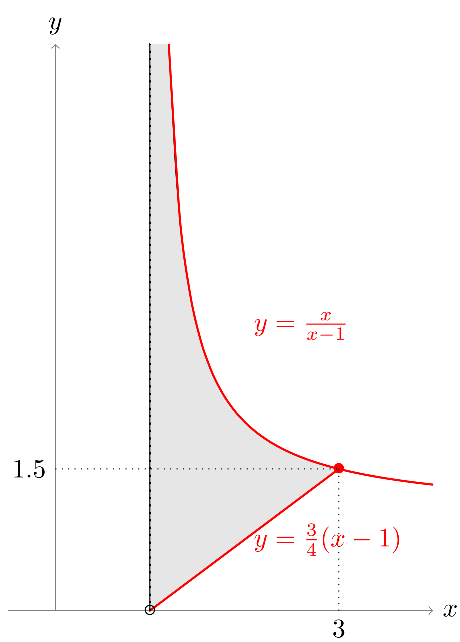
(b) (10 puntos) Considere el orden de Pareto definido sobre el conjunto A; hallar los maximales, minimales, máximo y mínimo de A. Razone las respuestas. Si encuentra que alguno de estos elementos no existe en A, razone por qué.

(c) (10 puntos) Estudie de forma gráfica la existencia de extremos globales de $f(x, y) = y - 2x$ en A. Utilice para ello los conceptos de curva de nivel y de dirección de máximo crecimiento o decrecimiento, dibujando algunos de estos objetos sobre la gráfica del conjunto A.

(d) (10 puntos) Estudie de forma gráfica la existencia de extremos globales de $f(x, y) = y - 0.5x$ en A. Utilice para ello los conceptos de curva de nivel y de dirección de máximo crecimiento o decrecimiento, dibujando algunos de estos objetos sobre la gráfica del conjunto A.

Solución:

(a) El conjunto se representa en la figura sombreada del gráfico siguiente. Notar que dado que $x \mapsto \frac{x}{x-1}$ tiene una asíntota vertical en $x = 1$, el conjunto A no es cerrado y no está acotado.



(b) Todos los puntos de la frontera superior de A están en A y no son comparables entre sí. Por tanto, todos ellos son maximales: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x \leq 3, y = \frac{x}{x-1}\}$. No hay máximo, por tanto. Tampoco hay minimales ni mínimo. Claramente el punto $(1, 0)$ es una cota inferior del conjunto A en el sentido de Pareto, y es la mayor de todas las cotas inferiores, pero el punto $(1, 0)$ no pertenece a A, por lo que es el inferior de A pero no es mínimo. El conjunto tampoco tiene minimales.

(c) Consideramos $f(x, y) = y - 2x$. Las curvas de nivel $y - 2x = c$ son rectas paralelas de pendiente 2 y ordenada en el origen c. Basta representar la recta de nivel $c = 0$, que pasa por el origen, y realizar desplazamientos paralelos para ver en qué dirección aumenta o disminuye la ordenada en el origen sobre el conjunto A.

La ordenada en el origen aumenta en la dirección NO. Dado que A no está acotado en esta dirección, no existe máximo de f en A. Véase la gráfica de la izquierda en la figura.

La ordenada en el origen disminuye en la dirección SE y $(3, 1.5)$ es el punto del coniunto A que pertenece a la recta de nivel c menor. Véase la gráfica de la izquierda en la figura.

Luego f no tiene máximo y $(3, 1.5)$ is el mínimo global de f en A

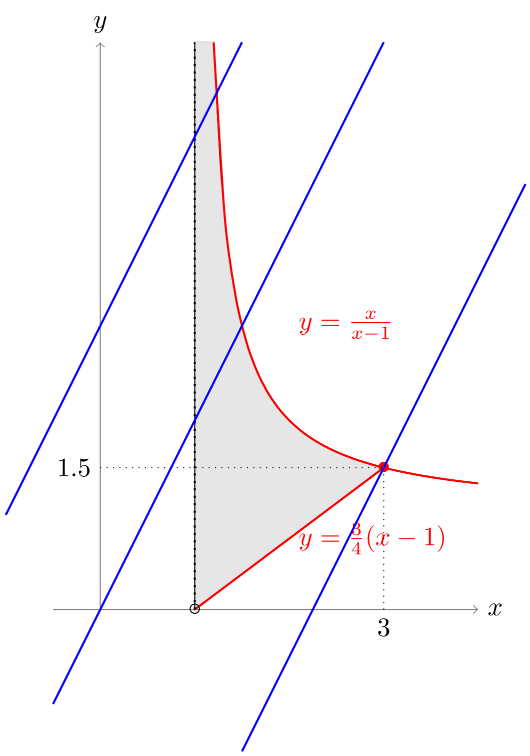
(d) Consideramos $f(x, y) = y - 0.5x$. Las curvas de nivel $y - 0.5x = c$ son rectas paralelas de pendiente 0.5 y ordenada en el origen c. Basta representar la recta de nivel $c = 0$, que pasa por el origen, y realizar desplazamientos paralelos para ver en qué dirección aumenta o disminuye la ordenada en el origen sobre el conjunto A.

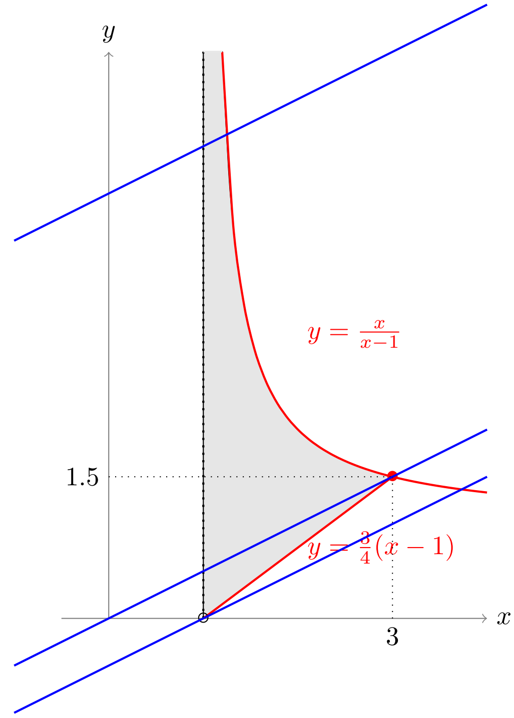
De nuevo, la ordenada en el origen aumenta en la dirección NO. Dado que A no está acotado en esta dirección, no existe máximo de f en A. Véase la gráfica de la derecha en la figura.

La ordenada en el origen disminuye en la dirección SE y el punto $(1, 0)$ es el punto de la adherencia de A que pertenece a la recta de nivel c menor, pero no es un punto de A. Luego, f no tiene mínimo en A. Véase la gráfica de la derecha en la figura.

En conclusión, f no tiene extremos en A.

La figura de la izquierda corresponde a $f(x, y) = y - 2x$, y la figura de la derecha a $f(x, y) = y - 0.5x$





$\boxed{2}$

Se considera la función $f(x, y) = x^3 + y^2 - 2xy - x + 6$.

(a) (10 puntos) Determinar los puntos críticos de f.

(b) (10 puntos) Clasificar los puntos críticos hallados en el apartado anterior. ¿Es alguno de ellos extremo global de f?

Solución:

(a) $\nabla f(x, y) = (3x^2 - 2y - 1, 2y - 2x) = (0, 0)$. Los puntos críticos son solución de este sistema de ecuaciones. Tenemos $y = x$ y entonces $3x^2 - 2x - 1 = 0$, lo que da como soluciones $x = 1$ y $x = -\frac{1}{3}$. Por tanto, hay dos puntos críticos, $P = (1, 1)$ y $Q = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$.

(b) La matriz Hessiana de f es

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Estudiamos el signo de la Hessiana en los puntos críticos.

$$Hf(P) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

es definida positiva, luego P es un mínimo local.

$$Hf(Q) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

es indefinida, luego Q es un punto de silla.

P no es mínimo global pues $f(x, 0) = x^3 - x$ tiende a $-\infty$ cuando $x \to -\infty$.

$\boxed{3}$

Se considera el problema de Lagrange:

$$\begin{array}{ll} \text{optimizar} & f(x,y,z) = 2x - y \\ \text{sujeto a:} & g(x,y,z) = (x-y)^2 + 3y^2 + z^2 = 39 \end{array}$$

(a) (5 puntos) Probar que el problema admite solución global.

(b) (10 puntos) Construir la función Lagrangiana asociada y hallar los puntos críticos.

(c) (10 puntos) Determinar los máximos y mínimos globales de f sujetos a la restricción y el valor óptimo de f en cada caso.

(d) (10 puntos) Dar un valor aproximado de los valores máximo y mínimo de f sobre el conjunto factible cuando la restricción se transforma en $g(x,y,z) = (x-y)^2 + 3y^2 + z^2 = 39 + h$, donde h es una cantidad despreciable.

Solución:

(a) El conjunto factible es compacto, pues es cerrado ya que está definido por una igualdad de una función continua y es acotado, pues: $|z| \leq \sqrt{39}$, $|y| \leq \sqrt{13}$ y entonces $|x| \leq \sqrt{13} + \sqrt{39}$.

Dado que f es continua y el conjunto factible es compacto, el Teorema de Weierstrass asegura la existencia de máximo y mínimo global.

(b) $L(x,y,z,\lambda) = 2x - y - \lambda((x-y)^2 + 3y^2 + z^2 - 39)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} & = 2 - 2(x-y)\lambda & = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} & = -1 - (-2(x-y) + 6y)\lambda & = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z} & = -2z\lambda & = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{1}{x-y} = \frac{1}{2x - 8y} \Rightarrow y = \frac{x}{7}$$

Notar que $x \neq y$ y $2x \neq 8y$. También, $\lambda \neq 0$. Al sustituir en g, tenemos

$$(x - \frac{x}{7})^2 + 3(\frac{x}{7})^2 + z^2 = 39 \Rightarrow \frac{36}{49}x^2 + \frac{3}{49}x^2 + z^2 = 39 \Rightarrow \frac{39}{49}x^2 + z^2 = 39.$$

Por otra parte, $2z\lambda = 0$, pero $\lambda \neq 0$, luego $z = 0$. Luego nos queda $\frac{39}{49}x^2 = 39$, por lo que $x^2 = 49$ y $x = \pm 7$.

Hemos encontrado pues los puntos críticos

$P = (7,1,0)$, con $\lambda_P = \frac{1}{7-1} = \frac{1}{6}$ y

$Q = (-7,-1,0)$, con $\lambda_Q = \frac{1}{(-7)-(-1)} = -\frac{1}{6}$

No hay más puntos críticos, ya que se cumple la cualificación de la restricción:

$$\nabla g(x,y,z) = (2(x-y), -2(x-y)+6y, 2z) = (0,0,0) \Leftrightarrow x = y, z = 0, \text{ and } -2(x-y)+6y = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0,$$

pero el punto $(0,0,0)$ no satisface la restricción.

(c) Como el problema admite solución global, simplemente evaluamos f en los puntos hallados, tomando el máximo y el mínimo. Claramente, P es el máximo global y Q es el mínimo global de f sujeta a la restricción.

$f(P) = 13$ y $f(Q) = -13$

(d) El valor máximo del programa cambia en aproximadamente $h\lambda_P = \frac{h}{6}$ y el valor mínimo en aproximadamente $h\lambda_Q = -\frac{h}{6}$. Por tanto, si denotamos por P_h y Q_h el máximo y el mínimo de f sujeto a la nueva restricción, los valores óptimos respectivos serán

$$f(P_h) \approx f(P) + \frac{h}{6} = 13 + \frac{h}{6}$$

y

$$f(Q_h) \approx f(Q) - \frac{h}{6} = -13 - \frac{h}{6}.$$

$\boxed{4}$

Se considera el programa

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & x+y \\ \text{s.a.} & x^2+y^2 \leq 4, \\ & y \leq 1. \end{array}$$

(a) (10 puntos) Discutir si se trata de un programa convexo y si las condiciones necesarias de Kuhn–Tucker son también suficientes.

(b) (15 puntos) Obtener las soluciones de las ecuaciones e inecuaciones de Kuhn–Tucker correspondientes al programa y resolver el programa de optimización.

Solución:

(a) Sí, pues se trata de maximizar una función lineal y, por tanto, cóncava, sobre un conjunto convexo. El conjunto $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, y \leq 1\}$ es intersección de un círculo centrado en el origen de radio 2, con un semiplano cerrado, por tanto es convexo. Las condiciones de K–T son necesarias y suficientes (cualquier punto que las verifique será máximo y, además, será global).

(b) $L(x, y, \lambda, \mu) = x + y + \lambda(4 - x^2 - y^2) + \mu(1 - y)$. Notar que $L_x = 1 - 2\lambda x$ y $L_y = 1 - 2\lambda y - \mu$. Las condiciones de K–T son

$$1 - 2\lambda x = 0, \tag{1}$$
$$1 - 2\lambda y - \mu = 0, \tag{2}$$
$$\lambda(4 - x^2 - y^2) = 0, \tag{3}$$
$$\mu(1 - y) = 0, \tag{4}$$
$$\lambda \geq 0, \tag{5}$$
$$\mu \geq 0, \tag{6}$$
$$4 - x^2 - y^2 \geq 0, \tag{7}$$
$$1 - y \geq 0 \tag{8}$$

(I) Caso $\lambda = 0$

De (1) obtenemos una contradicción.

(II) Caso $\lambda > 0$ y $\mu = 0$.

De (1) y (2), $x = y$. Al substituir en (3), $4 - 2x^2 = 0$, es decir $x = \pm\sqrt{2}$. Hemos hallado los puntos $(x_1, y_1) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y $(x_2, y_2) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

De vuelta a (1), tenemos $\lambda = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Por supuesto, eliminamos los puntos que corresponden a valores negativos de λ, $(x_2, y_2) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Por otra parte, (x_1, y_1) no satisface (8), ya que $1 - \sqrt{2} < 0$.

(III) Caso $\lambda > 0$ y $\mu > 0$. Esto indica que los posibles puntos que satisfacen K–T son del conjunto intersección del círculo $x^2 + y^2 = 4$ con la recta $y = 1$: $(x_3, y_3) = (\sqrt{3}, 1)$, $(x_4, y_4) = (-\sqrt{3}, 1)$.

De (1), obtenemos $\lambda = \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}$, eliminando el caso del multiplicador negativo, que corresponde al punto (x_4, y_4). El valor de μ que corresponde a (x_3, y_3) lo podemos encontrar de (2), obteniendo $\mu = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$. Todas las condiciones (1)–(8) se cumplen para el punto $(x_3, y_3) = (\sqrt{3}, 1)$.

Por el apartado (a), este punto es máximo global de f en A.