$\boxed{1}$

Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función $F(x, y) = ax + y$, donde $a \neq 0$. Se considera el orden de Pareto definido sobre el conjunto

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 - 2x;\ y \leq x + 4;\ x \geq 0\right\}.$$

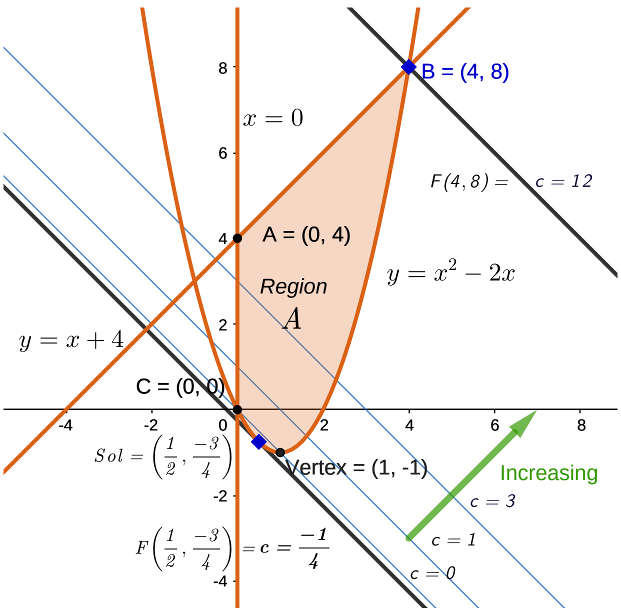
(a) (5 puntos) Dibuje el conjunto A. Calcule, si existen, los elementos maximales y minimales, así como el máximo y el mínimo de A. Justifique las respuestas.

(b) (5 puntos) Suponga que $a = 1$. Represente las curvas de nivel $c = 0, 1, 3$ de F sobre el conjunto A, así como la dirección de máximo crecimiento de la función F. Calcule, si existen, los máximos y los mínimos de F en A.

(c) (5 puntos) Halle el rango de valores de a tal que el máximo de F sobre A se alcance en el punto $(0, 4)$.

Solution:

(a)



Máximo(A) = Maximales$(A) = B(4, 8)$
Minimales$(A) = \{(x, y) : y = x^2 - 2x;\ 0 \leq x \leq 1\}$
Mínimo$(A) = \emptyset$

(b) Para $a = 1$, la función es $F(x, y) = x + y$. Las curvas de nivel $x + y = c$ for $c = 0, 1, 3$ y la dirección de crecimiento más rápido de F están representadas en el gráfico. La función alcanza su máximo en el punto $B(4, 8)$, con valor $F(4, 8) = 12$. El mınimo pertenece al conjunto de minimales (notar que F es monótona creciente) y para calcularlo, igualamos la pendiente de la curva de minimales con la pendiente 1 de las rectas de nivel, para encontrar el punto de tangencia.
$y = x^2 - 2x \to y' = 2x - 2$ y $x + y = c \to y = -x - 1 \to y' = -1$, luego $2x - 2 = -1 \to x = \frac{1}{2}$, que se corresponde con el punto de la parábola donde $y = \frac{-3}{4}$, de manera que el mínimo es Sol $= (\frac{1}{2}, \frac{-3}{4})$ y el valor mínimo de F es $F(\frac{1}{2}, \frac{-3}{4}) = -\frac{1}{4}$.

(c) La frontera AB del con junto A es un segmento de pendiente 1 y la frontera OA es un segmento vertical. Para que el punto $A(0, 4)$ sea el máximo global, el gradiente de F, $\nabla F = (a, 1)$, tiene que apuntar en dirección NO, luego $a < 0$; En consecuencia la pendiente de las rectas de nivel, a, debe pertenecer al intervalo $(-\infty, -1]$.

$\boxed{2}$

Una empresa monopolista produce dos bienes A y B, de los que vende diariamente x e y unidades, respectivamente. La función de costes está dada por

$$C(x,y) = x^2 + 4y^2 + 2xy - 20x + 30.$$

Los precios unitarios de los bienes A y B son, respectivamente

$$p_A(x,y) = 60 - x - ay,$$
$$p_B(x,y) = 80 - 4y - ax,$$

donde a es un parámetro desconocido.

(a) (5 puntos) Encontrar el rango de valores de a para los que la función de beneficios de la empresa es una función cóncava.

(b) (5 puntos) Sea $a = 1$. Encontrar los valores de x e y, si existen, que maximizan los beneficios de la empresa.

(c) (5 puntos) Sea $a = 1$. Un nuevo reglamento exige vender los productos en paquetes formados por una unidad del bien B y 2 unidades del bien A. Encontrar los valores de x e y, si existen, que maximizan los beneficios de la empresa.

Solution:

(a) Ingresos:

$$R(x,y) = x \cdot p_A + y \cdot p_B = 60x - x^2 - axy + 80y - 4y^2 - axy$$

Beneficios:

$$\begin{aligned}\Pi(x,y) &= R(x,y) - C(x,y) \\ &= 60x - x^2 - axy + 80y - 4y^2 - axy - (x^2 + 4y^2 + 2xy - 20x + 30) \\ &= -2x^2 - 8y^2 + 80x + 80y - (2+2a)xy - 3\end{aligned}$$

Matriz Hessiana de la función de beneficios:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -4x + 80 - (2+2a)y \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = -4 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial x} = -(2+2a) \end{cases}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = -16y + 80 - (2+2a)x \Rightarrow \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} = -16$$

Luego

$$\text{H}\Pi(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -(2+2a) \\[1ex] -(2+2a) & -16 \end{pmatrix}$$

Estudio del signo de los menores principales:

- $D_1 = -4 < 0$;
- $D_2 \geq 0$ sii $64 - (2+2a)^2 \geq 0$ sii $|2+2a| \leq 8$ sii $-8 \leq 2+2a \leq 8$. Es decir, $D_2 \geq 0$ sii $a \in [-5, 3]$.

Luego, Π es cóncava sii $a \in [-5, 3]$.

(b) Por el apartado (a), los extremos locales de Π satisfacen, con $a = 1$

$$\begin{aligned} -4x + 80 - 4y &= 0 \\ -16y + 80 - 4x &= 0. \end{aligned}$$

La solución es $(x, y) = (20, 0)$. Dado que $a = 1$ es uno de los valores de a donde Π is cóncava, (20,0) es el máximo global de Π.

(c) Sea $a = 1$. Al tener en cuenta la restricción, el problema es:

$$\max \ \Pi(x, y) = -2x^2 - 8y^2 + 80x + 80y - xy - 30 \quad \text{s.a}: \ x - 2y = 0.$$

La condición de regularidad se satisface dado que el gradiente de la restricción, $(1, -2)$ nunca es trivial.

Función Lagrangiana:

$$L(x, y, \lambda) = -2x^2 - 8y^2 + 80x + 80y - 6xy - 30 + \lambda(-x + 2y).$$

Ecuaciones de Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \Rightarrow -4x + 80 - 4y - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 0 \Rightarrow -16y + 80 - 4x + 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 0 \Rightarrow x = 2y. \end{aligned}$$

Despejando λ de las dos primeras ecuaciones e igualando las expresiones encontradas, tenemos

$$\lambda = -4x + 80 - 4y = 8y - 40 + 2x \quad \Rightarrow \quad 6x + 12y = 120.$$

Sustituyendo $x = 2y$ en esta última ecuación, tenemos $24y = 120$, luego $y = 5$ y, por tanto, $x = 10$.

Dado que la función de beneficios es cóncava cuando $a = 1$ y la restricción es lineal, el punto crítico, $(10, 5)$, es el 'unico máximo global de f sujeto a la restricción.

$\boxed{3}$

Se considera el siguiente problema de Lagrange:

$$\text{Optimizar } f(x,y) = xy - 3x - 6y$$
$$\text{sujeto a: } g(x,y) = 2x + 4y = 40.$$

(a) (5 puntos) Encontrar todos los puntos críticos del problema.

(b) (5 puntos) Encontrar todos los extremos locales de $f(x,y)$ sujetos a la restricción. Justificar si los extremos locales son o no globales.

(c) (5 puntos) Se supone que $f(x,y)$ es la función de beneficios de una empresa y que $2x + 4y = 40$ es la restricción presupuestaria, ambas expresadas en miles de euros.
Calcular de forma aproximada el incremento en los beneficios si los fondos de la empresa se incrementan en 1.000 euros.

Solution:

(a) Función Lagrangiana:

$$L(x,y,\lambda) = xy - 3x - 6y + \lambda(40 - 2x - 4y).$$

Ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) = y - 3 - 2\lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) = x - 6 - 4\lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = 40 - 2x - 4y = 0$$

Despejando λ en la primera y la segunda ecuación e igualando las expresiones obtenidas, tenemos

$$2y - 6 = 4\lambda = x - 6 \Longrightarrow 2y = x$$

y sustituyendo en la tercera ecuación,

$$4x = 8y = 40 \Longrightarrow (x^*, y^*) = (10, 5), \quad \text{con } \lambda = 1.$$

(b) Para determinar el carácter de $(10,5)$ (máximo local, mínimo local o punto de silla), calculamos la matriz Hessiana de L con respecto a x, y. La matriz coincide con la matriz Hessiana de $f(x,y)$, dado que la restricción es lineal. Luego

$$\mathrm{H}f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El espacio tangente es $\{(v,w) : 2v + 4w = 0\} = \{(2v, -v)\}$, luego

$$(2v, -v) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2v \\ -v \end{pmatrix} = -4v^2 < 0,$$

si $(2v, -v) \neq (0,0)$. Es decir, la matriz Hessiana restringida al espacio tangente es definida negativa, por lo que $(10,5)$ es un máximo local. Por tanto, al no haber más puntos críticos, no existen mínimos locales ni globales. Podemos ver que $(10,5)$ es un máximo global si sustituimos la restricción $x = 20 - 2y$ en f, obteniendo la función

$$F(y) = f(20 - 2y, y) = (20 - 2y)y - 3(20 - 2y) - 6y = -2y^2 + 20y - 60$$

que es estrictamente cóncava; luego el punto crítico, $y = 5$, es el mx́imo global, lo que se traduce en que $(10,5)$ es máximo global de f sujeto a la restricción.

(c) El multiplicador de Lagrange es $\lambda = 1$. Denotando mediante V la función valor del problema

$$V(b) = \max\left(xy - 3x - 6y\right)$$
$$\text{sujeto a: } 2x + 4y = b,$$

vemos que $\triangle V \approx \lambda \triangle b$, luego $\triangle V \approx 1.000$ euros.

$\boxed{4}$

Se considera el problema de Kuhn–Tucker:

$$\begin{array}{ll} \max & x + 2y \\ \text{s.t.} & x^4 + 2y^4 \leq 3. \end{array}$$

(a) (10 puntos) Encontrar todos los puntos que satisfacen todas las condiciones necesarias de Kuhn–Tucker.

(b) (5 puntos) Justificar que el problema tiene soluciones globales y encontrarlas.

Solution:

(a) Todos los puntos del conjunto factible son regulares, pues el único punto que anula el gradiente de $g(x, y) = x^4 + 2y^4$, $\nabla g(x, y) = (4x^3, 8y^3)$, es el $(0, 0)$, que no satura la restricción.

El Lagrangiano del problema es $L(x, y, \lambda) = x + 2y + \lambda(3 - x^4 - 2y^4)$.

Las condiciones necesarias de K-T son las siguientes igualdades y desigualdades:

$$1 - 4\lambda x^3 = 0 \tag{1}$$

$$2 - 8\lambda y^3 = 0 \tag{2}$$

$$\lambda(3 - x^4 - 2y^4) = 0 \tag{3}$$

$$3 - x^4 - 2y^4 \geq 0 \tag{4}$$

$$\lambda \geq 0 \tag{5}$$

De (1) y (2) vemos que $x \neq 0$ y $y \neq 0$. Por tanto

$$\lambda = \frac{1}{4x^3} = \frac{2}{8y^3},$$

por lo que $x = y$ y $\lambda \neq 0$, lo que a su vez implica, por (3), que se satura la restricción, $3 - x^4 - 2y^4 = 0$. Al sustituir $x = y$ en esta igualdad tenemos que

$$3 - 3x^4 = 0 \Rightarrow x = \pm 1.$$

Luego encontramos los puntos $(1, 1)$ con $\lambda = \frac{1}{4}$, que cumple todas las condiciones de K-T, y $(-1, -1)$, que incumple (5), pues $\lambda = -\frac{1}{4} < 0$.

(b) Se trata de un problema convexo pues la función objetivo es cóncava y las restricciones convexas, por lo tanto las condiciones necesarias son también suficientes (Teorema 3.1) y el punto es máximo global. También podría invocarse el Teorema de Weierstrass para obtener este resultado, dado que el conjunto factible es compacto.