HOJA 3: Derivadas parciales y diferenciación.

3-1. Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ para las siguientes funciones.
(a) $f(x,y) = x\cos x \operatorname{sen} y$
(b) $f(x,y) = e^{xy^2}$
(c) $f(x,y) = (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

3-2. Determinar la productividad marginal de cada factor para la siguiente función de producción

$$F(x,y,z) = 12x^{1/2}y^{1/3}z^{1/4}$$

3-3. Calcular el gradiente de las siguientes funciones en el punto p indicado.
(a) $f(x,y) = \left(a^2-x^2-y^2\right)^{1/2}$ en $p=(a/2,a/2)$.
(b) $g(x,y) = \ln(1+xy)^{1/2}$ en $p=(1,1)$.
(c) $h(x,y) = e^y\cos(3x+y)$ en $p=(2\pi/3,0)$.

3-4. Sea la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}\operatorname{sen}(xy) & si (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Calcular las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$.
(b) Comprobar que f es continua en $\mathbb{R}^2$. (*sug:* Utilizar (demostrando primero) que si $(x,y)\neq(0,0)$, entonces

$$0 \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|+|y|} \leq 1)$$

(c) ¿Es f diferenciable en $(0,0)$?

3-5. Sea la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\operatorname{sen} y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Estudia la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.
(b) Calcula las derivadas parciales en el punto $(0,0)$.
(c) ¿En qué puntos es diferenciable la función?

3-6. Sea la función

$$f(x,y) = \begin{cases} 2\frac{x^3y}{x^2+2y^2}\cos(xy) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Calcular las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$.
(b) Comprobar que f es continua en $\mathbb{R}^2$. (*sug:* Observa que si $(x,y)\neq(0,0)$, entonces

$$\frac{1}{x^2+2y^2} \leq \frac{1}{x^2+y^2})$$

(c) ¿Es f diferenciable en $(0,0)$?

3-7. Calcular las derivadas de las siguientes funciones en el punto p según el vector v indicados en cada caso.
(a) $f(x,y) = x+2xy-3y^2$, con $p=(1,2)$, $v=(3,4)$
(b) $g(x,y) = e^{xy}+y\operatorname{arctg} x$, con $p=(1,1)$, $v=(1,-1)$
(c) $h(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{1/2}$, con $p=(0,5)$, $v=(1,-1)$.

3-8. Sea $B(x,y) = 10x - x^2 - \frac{1}{2}xy + 5y$ los beneficios de una empresa. El año pasado vendió $x=4$ unidades de la mercancía 1 e $y=2$ unidades de la mercancía 2. Si este año desea aumentar sus ventas en una pequeña cantidad de la forma más beneficiosa posible, ¿a qué deberá ser igual $\frac{\Delta x}{\Delta y}$?

3-9. Se sabe que $\frac{\partial f}{\partial x}(2,3) = 7$ y $D_{(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}})}f(2,3) = 3\sqrt{5}$ obtener $\frac{\partial f}{\partial y}(2,3)$ y $D_v f(2,3)$ con $v = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.

3-10. Dada la función $f(x,y,z) = xy^2 + z^2y$, calcula la derivada según el vector $v = (1,-1,2)$ en el punto $(1,1,0)$. Determina la dirección para la que se maximiza (resp. minimiza) la derivada direccional en el punto $(1,1,0)$, así como su valor.

3-11. Sea $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ y $g(x,y) = (x+y, ay)$ determinar,
   (a) El valor de a para que la función $f \circ g$ tenga como dirección de máximo crecimiento la del vector $v = (5,7)$ en el punto $p = (1,1)$.
   (b) Las ecuaciones de la recta tangente y normal a la curva $xy^2 - 2x^2 + y + 5x = 6$ en el punto $(4,2)$.

3-12. Calcular la matriz Jacobiana de F en los casos siguientes.
   (a) $F(x,y,z) = (xyz, x^2z)$
   (b) $F(x,y) = (e^{xy}, \ln x)$
   (c) $F(x,y,z) = (\operatorname{sen} xyz, xz)$

3-13. Utilizando la regla de la cadena calcula las derivadas

$$\frac{\partial z}{\partial r} \quad \frac{\partial z}{\partial \theta}$$

en los casos siguientes.
   (a) $z = x^2 - 2xy + y^2$, $x = r + \theta$, $y = r - \theta$
   (b) $z = \sqrt{25 - 5x^2 - 5y^2}$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

3-14. La utilización del capital K en el instante t genera unos beneficios en ese momento de

$$B(t) = 5(1+t)^{1/2}K$$

Supongamos que el capital varía en el tiempo según la ecuación $K(t) = 120e^{t/4}$. Determinar la tasa de cambio de B.

3-15. Verificar la regla de la cadena para la función $h = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ con $x = e^t$, $y = e^{t^2}$ y $z = e^{t^3}$.

3-16. Verificar la regla de la cadena para la composición $f \circ c$ en los casos.

   (a) $f(x,y) = xy$, $c(t) = (e^t, \cos t)$.
   (b) $f(x,y) = e^{xy}$, $c(t) = (3t^2, t^3)$.

3-17. Expresar mediante la regla de la cadena $h'(x)$ en los siguientes casos.
   (a) $h(x) = f(x, u(x,a))$, donde $a \in \mathbb{R}$ es un parámetro.
   (b) $h(x) = f(x, u(x), v(x))$.

3-18. Determinar en qué puntos la superficie $z = e^{(x-1)^2+y^2}$ tiene un plano tangente horizontal y calcular su ecuación en esos puntos.

3-19. Considerar la función $f(x,y) = (xe^y)^3$.
   (a) Calcular el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(2,0)$.
   (b) Aproximar, utilizando el plano tangente a la gráfica de f, el valor de $(1,999e^{0,002})^3$.

3-20. Calcular el plano tangente y la recta normal a las superficies de nivel en los puntos que se indican a continuación.
   (a) $x^2 + 2xy + 2y^2 - z = 0$ en el punto $(1,1,5)$.
   (b) $x^2 + y^2 - z = 0$ en el punto $(1,2,5)$.
   (c) $(y - x^2)(y - 2x^2) - z = 0$ en el punto $(1,3,2)$.

3-21. Calcule los espacios tangente y normal a las siguientes superficies en el punto indicado.
   (a) $x^2 + 2xy + 2y^2 - z = -1$, $x^2 + 2y^2 + z = 9$ en el punto $(-2,0,5)$.
   (b) $x^2 - y^2 - z^2 = 2$, $x^4 + 2y^2 + z^2 = 19$ en el punto $(2,-1,1)$.
   (c) $x^4 + xy + z^4 = 2$, $x + y^2 + 2z^2 = 1$ en el punto $(-1,0,1)$.

3-22. Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos funciones cuyas derivadas parciales son continuas en todo $\mathbb{R}^2$.

(a) Probar que si
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$$
para todos los puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, entonces $f - g$ sólo depende de y.

(b) Probar que si
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$$
para todos los puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, entonces $f - g$ sólo depende de x.

(c) Probar que si $\nabla(f-g)(x,y) = (0,0)$ para todos los puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, entonces $f - g$ es constante en todo $\mathbb{R}^2$.

(d) Encontrar una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = yx^2 + x + 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2x + y, \quad f(0,0) = 1$$
¿Hay más funciones que verifiquen estas condiciones?