Sesión 10
Matemáticas para la Economía II

Derivación. Parte V. Derivadas de orden superior. Matriz Hessiana, Diferenciación implícita.

Grados en Economía, Estudios Internacionales–Economía y Derecho–Economía

Universidad Carlos III de Madrid

Matriz Hessiana.

- Para una función $f : D \to \mathbb{R}$ definimos las derivadas parciales segundas como $D_{ij}f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$.
- De la misma manera, podemos definir derivadas de orden superior.
- **Ejemplo:** Sea $f(x, y, z) = xy^2 + e^{zx}$.
- Entonces, $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + ze^{zx}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$ y $\frac{\partial f}{\partial z} = xe^{zx}$.
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = z^2 e^{zx}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = xe^{zx}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = xe^{zx}$
- Notemos que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$
- Esto también se cumple para las otras variables

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \quad y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$$

Teorema de Schwarz.

Teorema

Supongamos que para algún $i, j = 1 \ldots, n$ *las derivadas parciales*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

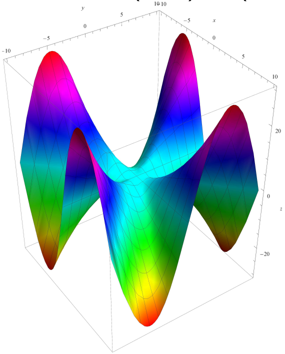
existen y son continuas en alguna bola $B(p, r)$*, con* $r > 0$*. Entonces,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$

para todo x *en la bola* $B(p, r)$*.*

Schwarz's Theorem.

- Este es un ejemplo donde las hipótesis del Teorema de Schwarz's no se verifican.
- Sea $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$



- La demostración está en las notas de clase.

Teorema de Schwarz.

- f pertenece a la clase
- $C^1(D)$ si todas las derivadas parciales primeras $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ de f existen y son continuas en D para todo $i = 1 \ldots, n$.
- $C^2(D)$ si todas las derivadas parciales primeras $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ de f existen y están en la clase $C^1(D)$ para todo $i = 1, \ldots, n$.
- $C^k(D)$ si todas las derivadas parciales primeras $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ de f existen y están en la clase $C^{k-1}(D)$ para todo $i = 1, \ldots, n$.
- $C^\infty(D)$ si f es de clase $C^k(D)$ para todo $i, k = 1, 2 \ldots$.
- Todas las funciones con las que vamos a trabajar son de clase C^∞ en sus dominios de definición. Se verificarán hipótesis del Teorema de Schwarz's.

La matriz Hessiana.

- Sea $f \in C^2(D)$. La matriz Hessiana de f en el punto p es la matriz

$$\mathrm{D}^2 f(p) = \mathrm{H}\, f(p) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right)_{i,j=1,\ldots,n}$$

- Por el teorema de Schwarz, la matriz $\mathrm{H}\, f(p)$ es simétrica.

El Teorema de la Función Implícita.

- Consideremos el sistema de ecuaciones

$$f_1(u,v)=0, \quad f_2(u,v)=0, \quad \cdots, \quad f_m(u,v)=0$$

- $u=(u_1,\dots,u_n)\in\mathbb{R}^n$ son las variables independientes
- $v=(v_1,\dots,v_m)\in\mathbb{R}^m$ son las variables que queremos resolver.
- Asociamos la siguiente expresión

$$\frac{\partial(f_1,f_2,\dots,f_m)}{\partial(v_1,\dots,v_m)}=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial v_m}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial v_m}\end{pmatrix}$$

El Teorema de la Función Implícita I.

Teorema (El Teorema de la Función Implícita)

Supongamos que las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_m : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *son de clase* C^1 *y hay un punto* $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *tal que*

1. $f_1(u_0, v_0) = f_2(u_0, v_0) = \cdots = f_m(u_0, v_0) = 0$; *y*
2. $\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_m)}{\partial(v_1, \ldots, v_m)}(u_0, v_0) \neq 0$.

El Teorema de la Función Implícita II.

Teorema (El Teorema de la Función Implícita)

Entonces, hay dos conjuntos $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ y funciones $g_1, \ldots g_m : U \to \mathbb{R}$ tales que

1. $u_0 \in U$, $v_0 \in V$.
2. *para cada* $u \in U$, $f_1(u, g_1(u), \ldots, g_m(u)) = f_2(u, g_1(u), \ldots, g_m(u)) = \cdots = f_m(u, g_1(u), \ldots, g_m(u)) = 0$.
3. *Si* $u \in U$ *y* $v = (v_1, \ldots, v_m) \in V$ *son soluciones del sistema de ecuaciones* $f_1(u, v) = f_2(u, v) = \cdots = f_m(u, v) = 0$, *entonces* $v_1 = g_1(u), \ldots v_m = g_m(u)$.
4. *Las funciones* $g_1, \ldots g_m : U \to \mathbb{R}$ *son diferenciables y para cada* $i = 1, 2, \ldots, m$ *y* $j = 1, 2, \ldots, n$ *se tiene que*

$$\frac{\partial g_i}{\partial u_j} = -\frac{\partial (f_1, f_2, \ldots, f_m)}{\partial (v_1, \ldots, v_{i-1}, u_j, v_{i+1}, \ldots, v_m)} \Bigg/ \frac{\partial (f_1, f_2, \ldots, f_m)}{\partial (v_1, \ldots, v_m)} \qquad (0.1)$$

El Teorema de la Función Implícita III.

- Explícitamente,

$$\frac{\partial\left(f_1, f_2, \ldots, f_m\right)}{\partial\left(v_1, \ldots, v_{i-1}, u_j, v_{i+1}, \ldots, v_m\right)} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial v_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial v_{i-1}} & \frac{\partial f_1}{\partial u_j} & \frac{\partial f_1}{\partial v_{i+1}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial v_m} \\ \vdots & \cdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial v_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial v_{i-1}} & \frac{\partial f_m}{\partial u_j} & \frac{\partial f_1}{\partial v_{i+1}} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial v_m} \end{pmatrix}$$

- La conclusión del Teorema de la Función Implícita puede ser explicado de la sigiente manera,
    1. Las funciones $v_1 = g_1(u), v_2 = g_1(u), \ldots, v_m = g_m(u)$ son las soluciones del sistema de ecuaciones.
    2. Las derivadas de las funciones $g_1, \ldots g_m : U \to \mathbb{R}$ pueden ser calculadas derivando implíctamente el sistema de ecuaciones y aplicando la regla de la cadena.
    3. Aplicando varias veces el Teorema podemos calcular derivadas de órdenes superiores de las variables dependientes.

El Teorema de la Función Implícita. Ejemplo.

- Sea

$$\begin{aligned} x^2 + ze^{xy} + z &= 1 \\ 3x + 2y + z &= 3 \end{aligned} \tag{0.2}$$

- $x = 1,\ y = z = 0$ es una solución del sistema.
- Además

$$\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (y, z)}(1,0,0) = \det \left(\begin{array}{cc} xze^{xy} & e^{xy} + 1 \\ 2 & 1 \end{array} \right)\Bigg|_{x=1, y=z=0} =$$

$$= \left(xze^{xy} - 2e^{xy} - 2\right)\big|_{x=1, y=z=0} = -4 \neq 0$$

- El Teorema de la función implícita garantiza que podamos obtener las variables y y z como funciones de x para valores de x cercanos a $x = 1$.

El Teorema de la Función Implícita. Ejemplo.

- Además, derivando respecto a x en el sistema obtenemos

$$\begin{aligned} 2x + z'e^{xy} + z(y + xy')e^{xy} + z' &= 0 \\ 3 + 2y' + z' &= 0 \end{aligned} \tag{0.3}$$

- Ahora, sustiyendo $x = 1, y = z = 0$,

$$\begin{aligned} 2 + 2z'(1) &= 0 \\ 3 + 2y'(1) + z'(1) &= 0 \end{aligned} \tag{0.4}$$

- De manera que $z'(1) = y'(1) = -1$.

El Teorema de la Función Implícita. Ejemplo.

- Esto podría calcularse usando también esta fórmula (0.1),

$$y'(1) = -\frac{\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,z)}(1,0,0)}{-4} = \frac{1}{4}\det\begin{pmatrix} 2x+yze^{xy} & e^{xy}+1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\Bigg|_{x=1,y=z=0} =$$

$$= \frac{-4}{4} = -1$$

y

$$z'(1) = -\frac{\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(y,x)}(1,0,0)}{-4} =$$

$$= \frac{1}{4}\det\begin{pmatrix} xze^{xy} & 2x+yze^{xy} \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\Bigg|_{x=1,y=z=0} = \frac{-4}{4} = -1$$

El Teorema de la Función Implícita.

- Para calcular las segundas derivadas $y''(x)$ y $z''(x)$, derivamos cada ecuación del sistema (0.3) respecto a x.
- Después, simplificando obtenemos:

$$2 + z''e^{xy} + 2z'(y + xy')e^{xy} + z(2y' + xy'')e^{xy} + z(y + xy')^2 e^{xy} + z'' = 0$$

$$2y'' + z'' = 0$$

- Sustituyendo $x = 1, y(1) = z(1) = 0$, $z'(1) = y'(1) = -1$

$$\begin{aligned} 2 + 2z''(1) &= 0 \\ 2y''(1) + z''(1) &= 0 \end{aligned}$$

- Obtenemos $z''(1) = -1$, $y''(1) = 1/2$.
- Derivando de manera repetida nos permite caclular las derivadas de cualquier orden. $z^{(n)}(1)$, $y^{(n)}(1)$.

El Teorema de la Función Implícita. Ejemplo.

- Consideremos la ecuación

$$x^2z^2 + 2yz + z^4 + 2 = 0$$

- Probamos que la ecuación de arriba determina de manera implícita una función diferenciable $z(x, y)$ en un entorno del punto $(x_0, y_0, z_0) = (-1, -2, 1)$.
- Notemos primero que $(x_0, y_0, z_0) = (-1, -2, 1)$ es una solución del sistema de ecuaciones. La función $f(x, y, z) = x^2z^2 + 2yz + z^4 + 2$ es de clase C^∞.
- Calculamos

$$\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(x,y,z)=(-1,-2,1)} = \left|2x^2z + 2y + 4z^3\right|_{(x,y,z)=(-1,-2,1)} = 2$$

- Por el teorema de la función implícita, el sistema de ecuaciones anterior determina de manera implícita una función diferenciable $z(x, y)$ en un entorno del punto $(x_0, y_0, z_0) = (-1, -2, 1)$.

El Teorema de la Función Implícita. Ejemplo.

- Calculemos

$$\frac{\partial z}{\partial y}(-1,-2),$$

- Derivando la ecuación implícitamente respecto a y,

$$2x^2\frac{\partial z}{\partial y}z+4\frac{\partial z}{\partial y}z^3+2y\frac{\partial z}{\partial y}+2z=0$$

- Al sustituir en los valores $(x_0,y_0,z_0)=(-1,-2,1)$ obtenemos lo siguiente

$$2\frac{\partial z}{\partial y}+2=0$$

- Así,

$$\frac{\partial z}{\partial y}(-1,-2)=-1$$

El Teorema de la Función Implícita. Ejemplo.

- Calculemos

$$\frac{\partial z}{\partial x}(-1,-2),$$

- Derivando la ecuación implícita respecto a x,

$$-2x^2\frac{\partial z}{\partial x}z + 2xz^2 + 4\frac{\partial z}{\partial x}z^3 + 2y\frac{\partial z}{\partial x}$$

- Sustituyendo para $(x_0, y_0, z_0) = (-1,-2,1)$ obtenemos lo siguiente

$$2\frac{\partial z}{\partial x} - 2 = 0$$

- Así,

$$\frac{\partial z}{\partial x}(-1,-2) = 1$$