Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas I. 16 de enero de 2026.

Apellidos:		**Nombre:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

IMPORTANTE

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **NO DESGRAPE LAS HOJAS DEL EXAMEN.**
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Hay espacio adicional para operaciones al final del examen y detrás de esta página.

Problema	Puntuación
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Total	

Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas para la Economía I. 16 de enero de 2026.

---

(1) Considere el conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y^2 - 12 \leq 0, x + 2y \geq 0\}$$

y la función

$$f(x,y) = e^{\frac{x}{2}+y}$$

(a) **(20 puntos)** Dibuje el conjunto A, su frontera y su interior, y justifique si es abierto, cerrado, acotado y/o compacto.
(b) **(10 puntos)** Demuestre que el conjunto A es convexo.
(c) **(5 puntos)** Enuncie el Teorema de Weierstrass. Determine si es posible aplicar el Teorema de Weierstrass a la función f definida sobre A.
(d) **(10 puntos)** Dibuje las curvas de nivel de f, indicando la dirección de crecimiento de la función.
(e) **(20 puntos)** Utilizando las curvas de nivel de f, determine (si existen) los puntos del conjunto A donde la función f alcanza sus valores de **mínimo global** y/o **máximo global** en el conjunto A.

(2) Considere la función $f(x,y,z) = -x^2 - 2xy - y^3 + 4yz - z^3$ definida en $\mathbb{R}^3$.
(a) **(15 puntos)** Determine D, el conjunto abierto más grande de $\mathbb{R}^3$ donde la función f es estrictamente cóncava.

(b) **(10 puntos)** Demuestre que el conjunto D hallado en el apartado anterior es convexo.

(3) Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} xy + 2xz^2 + 6 &= 0 \\ x^2 + y + 2z &= 7 \end{aligned}$$

(a) **(10 puntos)** Utilizando el teorema de la función implícita, demuestre que el sistema de ecuaciones anterior determina implícitamente dos funciones derivables $y(x)$ y $z(x)$ en un entorno del punto $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 4, 1)$.

(b) **(15 puntos)** Calcule $y'(-1)$, $z'(-1)$.
(c) **(10 puntos)** Calcule el polinomio de Taylor de orden 1 de las funciones $y(x)$ y $z(x)$ en el punto $x_0 = -1$.
(d) **(5 puntos)** Utilice el polinomio de Taylor de orden 1 de las funciones $y(x)$ y $z(x)$ en el punto $x_0 = -1$ para dar un valor aproximado de $y(-0.99)$ y $z(-0.99)$.

(4) Considere la forma cuadrática

$$Q(x,y,z) = bx^2 + 4xy - 2y^2 + 2xz + 2yz + az^2$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$.
(a) **(5 puntos)** Calcule la matriz simétrica A asociada a Q.

(b) **(10 puntos)** Calcule los menores principales D_1, D_2 y D_3 de A.

(c) **(15 puntos)** ¿Para qué valores de $a \neq 0$ y $b \neq 0$ es la forma cuadrática Q definida positiva?

(d) **(15 puntos)** ¿Para qué valores de $a \neq 0$ y $b \neq 0$ es la forma cuadrática Q definida negativa?

(e) **(15 puntos)** Clasifique la forma cuadrática Q para los valores de $b = 0$, $a \in \mathbb{R}$.

(5) (a) **(20 puntos)** Considere la función $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y las funciones $x(t,z), y(t,z) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x,y) = xy + e^y \qquad \text{y} \qquad x(t,z) = t + z^2, \quad y(t,z) = tz$$

Y considere la composición $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(t,z) = f(x(t,z), y(t,z))$. Utilice la regla de la cadena para calcular

$$\frac{\partial h}{\partial t}(0,1), \quad \frac{\partial h}{\partial z}(0,1)$$

(b) **(10 puntos)** Considere dos funciones $g(x,y) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\sigma(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Sea $h(t) = g(\sigma(t))$. Se sabe que $\sigma(0) = (1,-1)$, $\sigma'(0) = (4,0)$ y $h'(0) = 8$. textquestiondown Cuál es el valor de $\frac{\partial g}{\partial x}(1,-1)$?

(6) Considere el punto $p = (0,1,-1)$ en la curva S definida por las ecuaciones

$$x^2 - 2xy + 2y^2 + z = 1, \quad x^3 - y - z^2 = -2$$

(a) **(10 puntos)** Calcule la recta tangente a la curva S en el punto $p = (0,1,-1)$.

(b) **(10 puntos)** Calcule las ecuaciones paramétricas del plano perpendicular a la curva S en el punto $p = (0,1,-1)$. (Estas ecuaciones son de la forma $(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + \lambda_1(a,b,c) + \lambda_2(d,e,f)$)

(c) **(5 puntos)** Calcule la ecuación general (o implícita) del plano perpendicular a la curva S en el punto $p = (0,1,-1)$. Esta ecuación es de la forma $ax + by + cz = d$.