Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas I. 17 de enero de 2025.

Apellidos: GARCIA RUIZ		**Nombre:** LUCIA
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:** (R-66. FRANCISCO ASTUDILLO)

IMPORTANTE

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **NO DESGRAPE LAS HOJAS DEL EXAMEN.**
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Hay espacio adicional para operaciones al final del examen y detrás de esta página.

Problema	Puntuación
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Total	

Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas para la Economía I. 17 de enero de 2025.

---

(1) Considere el conjunto

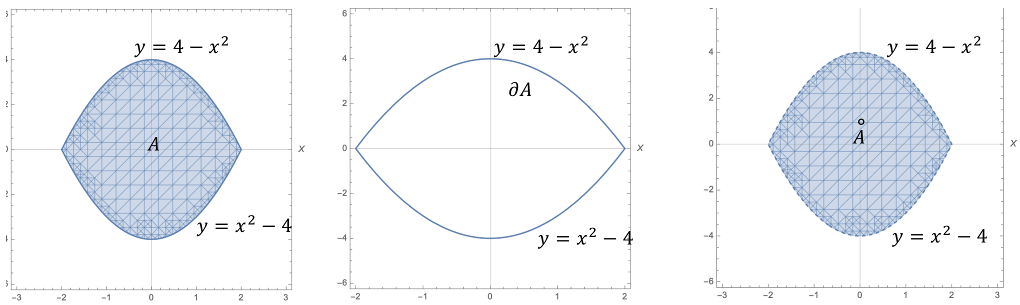
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 5, -3x \leq y \leq 3x\}$$

y la función

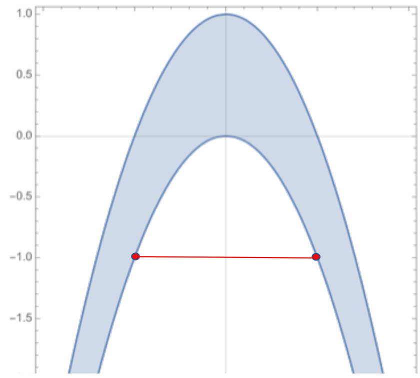
$$f(x, y) = (2y - x)^3$$

(a) **(20 puntos)** Dibuje el conjunto A, su interior y su frontera. Justifique si el conjunto A es abierto, cerrado, acotado y/o compacto.

Solución: *El conjunto A, su interior y su frontera se pueden ver representados aproximadamente en la siguiente figura.*



Su clausura coincide con A, $\bar{A} = A$. La función $h(x, y) = y + x^2$ es continua y $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq h(x, y) \leq 1\}$. Por lo tanto, el conjunto A es cerrado (Notar que $\partial A \subset A$). No es un conjunto abierto ya que $A \cap \partial A \neq \emptyset$.
Podemos ver que para cada $x \in \mathbb{R}$ los puntos $(x, -x^2) \in A$. Luego, el conjunto A no es acotado. Por lo tanto, el conjunto A no es compacto.
No es un conjunto convexo de puntos porque $(-1, -1), (1, -1) \in A$ pero el segmento que los une no está completamente contenido en A.



(b) **(10 puntos)** Demuestre que el conjunto A is convexo.

(c) **(5 puntos)** Enuncie el teorema de Weierstrass. Determine si es posible aplicar el teorema de Weierstrass a la función f definida en A.

Solución: *El conjunto A no es un conjunto compacto. Por lo tanto, el teorema de Weierstrass no tiene porqué cumplirse.*

(d) **(10 puntos)** Dibuje las curvas de nivel de f, indicando la dirección de crecimiento de la función.

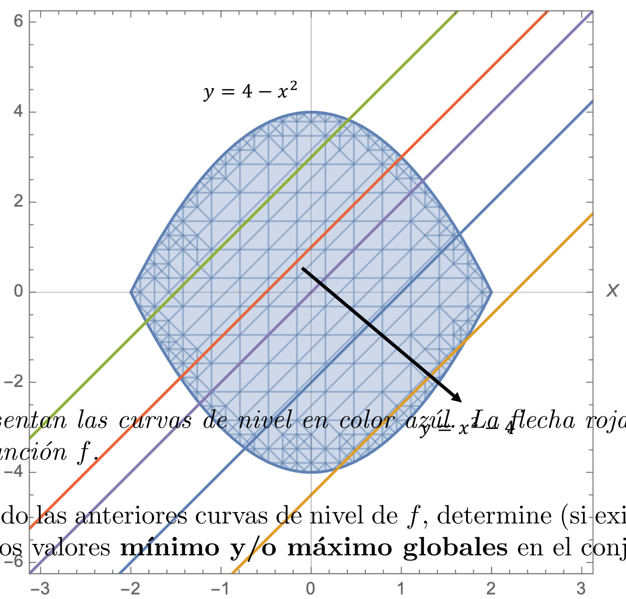
Solución: *Las curvas de nivel*

$$f(x,y) = e^{y+2x} = D$$

son líneas rectas de la forma

$$y = \ln D - 2x$$

Gráficamente,



En el dibujo se representan las curvas de nivel en color azúl. La flecha roja indica la dirección de crecimiento para la función f.

(e) **(20 puntos)** Utilizando las anteriores curvas de nivel de f, determine (si existen) los puntos donde la función f alcanza los valores **mínimo y/o máximo globales** en el conjunto A.

Solución: *Primero, nos fijamos que $f(x,y) = e^{y+2x} > 0$ para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Tomando puntos de la forma $(-x,-x^2) \in A$,vemos que $f \lim_{x\to\infty}(-x,-x^2) = e^{-x^2-2x} = 0$ Por lo tanto, la función no alcanza un valor mínimo sobre A.*
Gráficamente, el valor máximo se alcanza en el punto (a,b) donde la recta $y = \ln D - 2x$ es tangente a la gráfica de la función $g(x) = 1 - x^2$. La pendiente de la recta $y = \ln D - 2x$ es $m = -2$. Entonces $g'(a) = -2a = -2$. Además $a = b = 1$. El valor máximo se alcanza en el punto $(1,1)$ y

el valor máximo de la función es $f(1,1) = e^3$.

(2) Considere la función $f(x, y, z) = -x^3 - 2xy - y^3 + 2yz - z^2$ definida en $\mathbb{R}^3$.

(a) **(15 puntos)** Determine el mayor conjunto abierto D de $\mathbb{R}^3$ donde la función f es estrictamente cóncava.

(b) **(10 puntos)** Demuestre que el conjunto D encontrado en el apartado anterior es convexo.

(3) Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} ty - xy + xz &= 3 \\ t^2x + z &= 2 \end{aligned}$$

(a) **(10 puntos)** Demuestre que el anterior sistema de ecuaciones determina implícitamente dos funciones diferenciable $y(x,t)$ y $z(x,t)$ en un entorno del punto $(x_0, y_0, z_0, t_0) = (0, 3, 2, 1)$.

Solución: *We first remark that* $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, -1)$ *is a solution of the system of equations. The functions* $f_1(x, y, z) = 2xy + xz^2$ *and* $f_2(x, y, z) = xy^2 + z$ *are of class* C^∞. *We compute*

$$\left|\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(y, z)}\right|_{(x,y,z)=(1,0,-1)} = \begin{vmatrix} 2x & 2xz \\ 2xy & 1 \end{vmatrix}_{(x,y,z)=(1,0,-1)} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

By the implicit function theorem, the above system of equations determines implicitly two differentiable functions $y(x)$ *and* $z(x)$ *in a neighborhood of the point* $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, -1)$.

(b) **(15 puntos)** Calcule

$$\frac{\partial y}{\partial x}(0,1), \frac{\partial z}{\partial x}(0,1), \frac{\partial y}{\partial t}(0,1), \frac{\partial z}{\partial t}(0,1)$$

Solución: *Differentiating implicitly with respect to* x,

$$\begin{aligned} 0 &= 2xy'(x) + 2y(x) + 2xz(x)z'(x) + z(x)^2 \\ 0 &= 2xy(x)y'(x) + y(x)^2 + z'(x) \end{aligned}$$

We plug in the values $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, -1)$ *to obtain*

$$\begin{aligned} 0 &= 2y'(1) - 2z'(1) + 1 \\ 0 &= z'(1) \end{aligned}$$

Therefore

$$y'(1) = -\frac{1}{2}, \quad z'(1) = 0$$

(c) **(10 puntos)** Calcule el polinomio de Taylor de orden uno de las funciones $y(x,t)$ y $z(x,t)$ en el punto $(x_0, t_0) = (0, 1)$.

Solución: *Taylor's polynomial of order 1 of the function* $y(x)$ *at the point* $x_0 = 1$ *is*

$$P_1(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) = \frac{1-x}{2}$$

Taylor's polynomial of order 1 of the function $z(x)$ *at the point* $x_0 = 1$ *is*

$$P_1(x) = z(x_0) + z'(x_0)(x - x_0) = -1$$

(d) **(5 puntos)** Utilice el polinomio de Taylor de orden uno de las funciones $y(x,t)$ y $z(x,t)$ en el punto $(x_0, t_0) = (0, 1)$ para calcular un valor aproximado de $y(0.01, 0.99)$ y $z(0.01, 0.99)$.

(4) Considere la forma cuadrática

$$Q(x, y, z) = ax^2 + by^2 + 4xy + 2xz + 2yz + z^2$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) **(5 puntos)** Calcule la matriz simétrica A asociada a Q.

(b) **(10 puntos)** Calcule los menores principales D_1, D_2 and D_3 de A.

(c) **(15 puntos)** ¿Para qué valores de $a \neq 0$ and $b \neq 0$ la forma cuadrática Q es definida positiva?

(d) **(15 puntos)** ¿Para qué valores de $a \neq 0$ and $b \neq 0$ la forma cuadrática Q es definida negativa?

(e) **(15 puntos)** Clasifique la forma cuadrática Q para el valor $a = 0$, $b \in \mathbb{R}$.

(5) **(20 puntos)** Considere la función $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y las funciones $x(t,z), y(t,z) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x,y) = xy + y^2, \qquad x(t,z) = t^2 + z, \quad y(t,z) = tz^2$$

Y considere la composición $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(t,z) = f(x(t,z), y(t,z))$. Usando la regla de la cadena calcule

$$\frac{\partial h}{\partial t}(-1,1), \quad \frac{\partial h}{\partial z}(-1,1)$$

(6) Considere la función

$$f(x,y) = 5x^4 + 3x^2 + 4xy + y^6 + 5y^2$$

(a) **(5 puntos)** Calcule el gradiente y la matriz Hessiana de la función f en el punto (x, y).

(b) **(10 puntos)** Calcule el polinomio de Taylor de orden 1 de la función f en el punto $p = (0, 1)$.

(c) **(10 puntos)** Calcule el polinomio de Taylor de orden 2 of la función f en el punto $p = (0, 1)$.

(d) **(10 puntos)** Demuestre que para cualquier punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se verifica la siguiente desigualdad

$$5x^4 + 3x^2 + 4xy + y^6 + 5y^2 \leq 4x + 16y - 10$$

y que la desigualdad es estricta excepto para $x = 0$, $y = 1$.