Universidad Carlos III de Madrid

Ejercicio	1	2	3	4	Total
Puntos					

Departamento de Economía **Introducción a las Matemáticas para la Economía**

Examen Final 17 junio 2025 **Duración: 1 hora y 40 minutos**

APELLIDOS:		**NOMBRE:**
ID:	**GRADO:**	**GRUPO:**

(1) **Sea la función** $f(x) = \ln(e^{2x} - 1)$**. Se pide:**

(a) Hallar el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

Sugerencia: observar que $\ln(a) - b = \ln(\frac{a}{e^b})$

(b) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y la imagen de $f(x)$.

(c) Hallar los intervalos de concavidad y convexidad, el cero de la función (si existe) y representar la gráfica de $f(x)$.

0,3 puntos apartado a); 0,3 puntos apartado b); 0,4 puntos apartado c).

---

a) En primer lugar, el dominio de la función es $(0, \infty)$, pues e^{2x} es creciente, vale 1 en $x = 0$, luego $e^{2x} - 1 > 0$ cuando $x > 0$.

Como $\lim_{x\to 0^+} \ln(e^{2x} - 1) = \ln(0^+) = -\infty$, se deduce que $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$.

Por otro lado, aplicando L'Hopital, como $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln(e^{2x} - 1)}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{2e^{2x}}{e^{2x} - 1} = 2$, y $\lim_{x\to\infty} \ln(e^{2x} - 1) - 2x = \lim_{x\to\infty} \ln(e^{2x} - 1) - \ln e^{2x} = \lim_{x\to\infty} \ln \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \ln\left(1 - \dfrac{1}{e^{2x}}\right) = \ln(1^-) = 0^-$, se deduce que la recta $y = 2x$ es asíntota oblicua de la función en $+\infty$, aproximándose la gráfica a la asíntota por debajo.

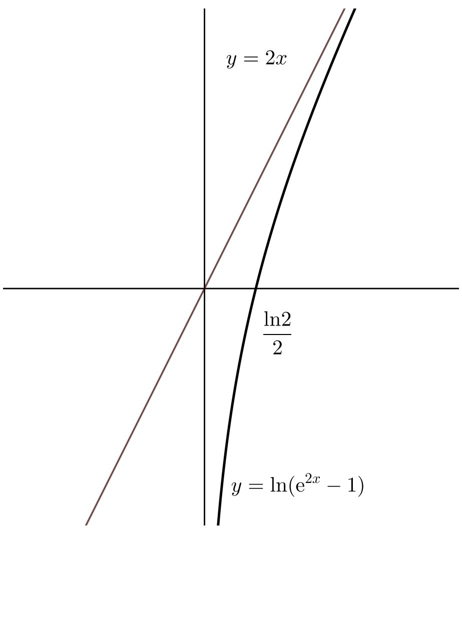
b) Para estudiar el crecimiento y decrecimiento, derivamos la función: $f'(x) = \dfrac{2e^{2x}}{e^{2x} - 1} > 0$, luego $f(x)$ es creciente en su dominio.

En cuanto a la imagen, como $f(x)$ es continua en su dominio y tiende a $-\infty$ y $+\infty$ en 0^+ e ∞, respectivamente, deducimos que su imagen será $\mathbb{R}$.

c) Para estudiar la curvatura de la función, calculamos su derivada segunda. $f''(x) = \left(\dfrac{2e^{2x} - 2 + 2}{e^{2x} - 1}\right)' = \left(2 + \dfrac{2}{e^{2x} - 1}\right)' = \dfrac{-4e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2} < 0$, luego la función es cóncava en todo su dominio.

Por otro lado, el cero de la función se hallará en el punto x que cumpla $\ln(e^{2x} - 1) = 0$, es decir, $e^{2x} - 1 = 1 \iff e^{2x} = 2 \iff x = \dfrac{\ln 2}{2}$.

En cuanto a su gráfica, tendrá un aspecto, aproximadamente, así:



(2) **Dada la función $y = f(x)$, definida de forma implícita mediante la ecuación $e^x + e^y = 1 + e^2$ en un entorno del punto $x = 0, y = 2$, se pide:**

(a) Hallar la recta tangente y el polinomio de Taylor de orden 2 de f en $a = 0$.

(b) Representar la gráfica de f cerca del punto $x = 0, y = 2$.

(c) Representar la gráfica de la inversa de f.

Sugerencia para b y c: utilizar que $f'(0) < 0$, $f''(0) < 0$.

0,4 puntos apartado a); 0,3 puntos apartado b); 0,3 puntos apartado c).

---

a) En primer lugar, calculamos implícitamente la derivada primera de la función:

$$e^x + e^y y' = 0$$

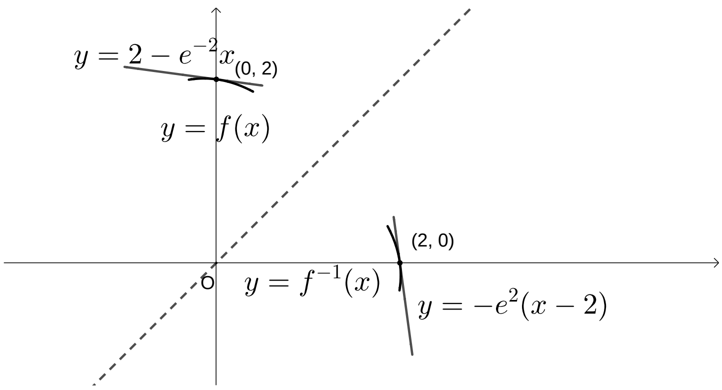
Sustituyendo $x = 0$, $y(0) = 2$ se deduce que $y'(0) = f'(0) = -e^{-2}$.
Luego la ecuación de la recta tangente será:
$y = P_1(x) = 2 - e^{-2}x$ o $\frac{x}{e^2} + y = 2$.
Análogamente, calculamos implicitamente la derivada segunda de la función:
$e^x + e^y y' y' + e^y y'' = 0$
Sustituyendo $x = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -e^{-2}$ se deduce que $y''(0) = f''(0) = -e^{-2} - e^{-4}$.
Luego la ecuación del polinomio de Taylor de orden 2 será:

$$y = P_2(x) = 2 - e^{-2}x - \frac{(e^{-2} + e^{-4})}{2}x^2$$

b) Utilizando el polinomio de Taylor de orden 2, la gráfica de f cerca del punto $x = 0$, será, aproximadamente, como se ve en la figura al final.

c) Por simetría, la ecuación de la recta tangente a la inversa de f cerca del punto $(2, 0)$ será: $y = -e^2(x-2)$.

Por otro lado, la inversa de $f(x)$ es cóncava cerca de $x = 2$, con lo cual la gráfica de $f^{-1}(x)$ será, aproximadamente, así:



(3) **Sea** $C(x) = (5x^2 - 6x + 9)^{1/2}$ **la función de costes de una empresa monopolista, donde** $x \geqslant 1$. **Se considera la función de costes medios** $C_m(x) = C(x)/x$.

(a) Hallar la producción que minimiza los costes medios.

Sugerencia: no intentar probar que dicha función es convexa, pues no lo es. Mejor hallar el único punto crítico x_0 *y dibujar la función* $C_m(x)$*, calculando únicamente* $C_m(1)$, $C_m(x_0)$ *y* $\lim_{x\to\infty} C_m(x)$.

(b) Supongamos ahora que $p(x) = A - \sqrt{12x}$ es la función inversa de demanda, que la empresa produjo el año pasado $x = 3$ unidades, y que dicha empresa no se plantea variar su producción si sus beneficios marginales son 0 (es decir, si $B'(3) = 0$). ¿Para qué valores de A dicha empresa NO variará su producción?

0,5 puntos apartado a); 0,5 puntos apartado b).

---

a) En primer lugar, hallamos y derivamos los costes medios:

$$C(x)/x = (5 - 6/x + 9/x^2)^{1/2} \quad \Longrightarrow \quad (C(x)/x)' = \frac{6/x^2 - 18/x^3}{2(5 - 6/x + 9/x^2)^{1/2}} = 0$$

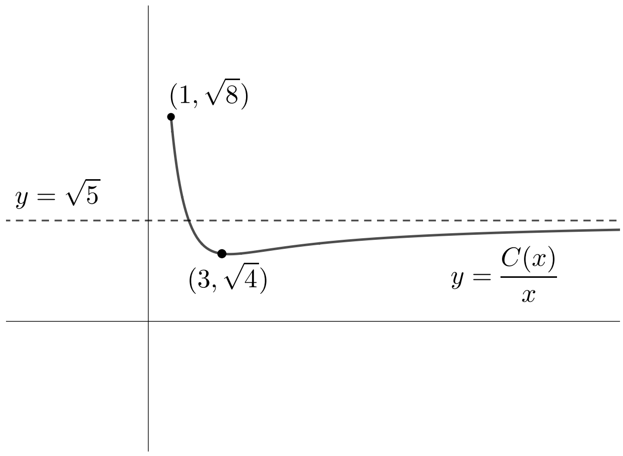
$\Longrightarrow 1 - 3/x = 0$

Por tanto, $x = 3$ es el único punto crítico de la función de costes medios.

Para probar que es el minimizador global en el intervalo $[1, \infty)$, observamos que: $C_m(1) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $C_m(3) = \sqrt{4} = 2$, $\lim_{x\to\infty} C_m(x) = \sqrt{5}$, luego $C_m(x)$ debe ser decreciente en el intervalo $[1, 3]$ y creciente en el intervalo $[3, \infty)$.

Por lo tanto, $x = 3$ es un minimizador global de la función de costes medios en el intervalo $[1, \infty)$.

Véase la gráfica de la función de costes medios:



b) Como $B(x) = Ax - 2\sqrt{3}x^{3/2} - C(x)$, se deduce que:

$$B'(x) = A - 3\sqrt{3}x^{1/2} - C'(x) \quad \Longrightarrow \quad B'(3) = A - 9 - 2$$

pues $C'(x) = \dfrac{10x - 6}{2(5x^2 - 6x + 9)^{1/2}} \quad \Longrightarrow \quad C'(3) = \dfrac{24}{2(45 - 18 + 9)^{1/2}} = 2.$

Así pues, concluimos que, si $A = 11 \Longrightarrow B'(3) = 0$, luego, para dicho valor de A, la empresa no variará su producción.

4 **Sea** $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 3 & \text{, si } x < 1 \\ A & \text{, si } x = 1 \\ 8x + b & \text{, si } x > 1 \end{cases}$. **Se pide:**

(a) **Enunciar el teorema del valor medio de Lagrange.**

(b) **Hallar** a, A **y** b **de forma que se cumplan las hipótesis del teorema del valor medio de Lagrange en el intervalo** $[0, 2]$.

(c) **Supongamos ahora que** $a = 6,\ b = 0$. **¿Se cumplen las hipótesis del teorema anterior para algún valor de** A **en el intervalo** $[0, 2]$**? ¿Y la tesis del citado teorema para algún valor de** A?

0,2 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b); 0,4 puntos apartado c).

---

a) Mirar notas de clase.

b) $f(x)$ continua en $x = 1$ si $4 + a = A = 8 + b$.

f derivable en $x = 1$ si $f'(1^-) = f'(1^+) = f'(1)$ suponiendo que la función es continua, esto es equivalente a $2 + a = 8$.

Luego se cumplen las hipótesis cuando $a = 6,\ A = 10,\ b = 2$.

c) No se cumple ya que f no es continua en $x = 1$ para ningún valor de A.

Ahora bien, $f(2) - f(0) = 16 - 3 = 13 = 2f'(c)$ y

$$2f'(c) = \begin{cases} 2(2c + 6) & \text{, si } c < 1 \\ 16 & \text{, si } c > 1 \end{cases}$$

luego, si $c < 1$, la tesis del teorema se cumple si $13 = 4c + 12 \iff c = 1/4$.

Luego la tesis se cumple para cualquier valor de A.