1

Sea la función $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}}$. Se pide:

(a) (5 puntos) Hallar el dominio y asíntotas de la función.

(b) (10 puntos) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos locales y globales de $f(x)$. Hallar la imagen de $f(x)$ y dibujar su gráfica.

Solución:

(a) El dominio de la función anterior es $(-1, \infty)$. Por tanto, no hay asíntotas en $-\infty$.

Como la función es continua en su dominio, solo hay que estudiar las posibles asíntotas verticales en -1^+ :

$\lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \dfrac{\ln(0^+)}{0^+} = \dfrac{-\infty}{0^+} = -\infty$; luego la función tiene asíntota vertical en $x = -1^+$.

Por otro lado, $\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}} = \dfrac{\infty}{\infty} =$ (aplicando L'Hopital) $=$

$= \lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{1/(1+x)}{1/2\sqrt{1+x}} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{2}{\sqrt{1+x}} = 0.$

Luego la función tiene una asíntota horizontal $y = 0$ en ∞.

(b) Como $f\,'(x) = \dfrac{(1+x)^{-1}\sqrt{1+x} - (1/2\sqrt{1+x})\ln(1+x)}{1+x}$, se deduce que :

f es creciente $\Longleftrightarrow f\,'(x) > 0 \Longleftrightarrow (1+x)^{-1}\sqrt{1+x} - (1/2\sqrt{1+x})\ln(1+x) > 0 \Longleftrightarrow$ (multiplicando por

$2\sqrt{1+x}) \Longleftrightarrow 2 - \ln(1+x) > 0 \Longleftrightarrow 2 > \ln(1+x) \Longleftrightarrow 1 + x < e^2$; luego f creciente en $(-1, e^2-1]$.

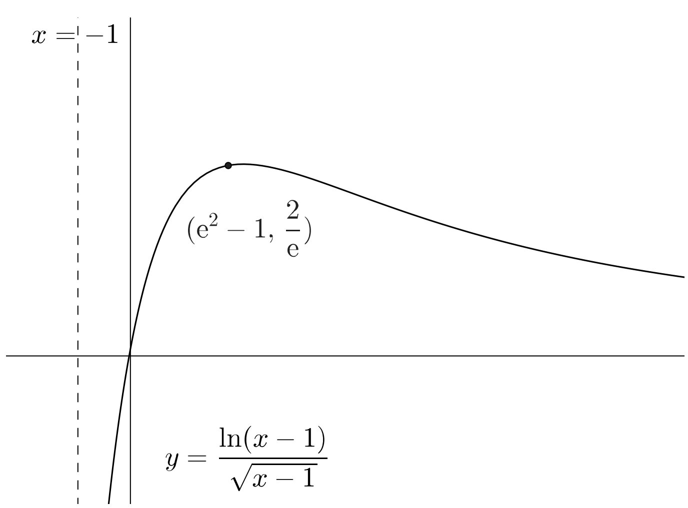
Análogamente, f es decreciente en $[e^2 - 1, \infty)$.

De lo anterior se deduce que f alcanza un máximo local y global en $x = e^2 - 1$.

Análogamente, f no posee mínimo ni local ni global.

También se deduce de lo anterior que, como $f(e^2-1) = \dfrac{\ln(e^2)}{\sqrt{e^2}} = \dfrac{2}{e}$, $\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = 0$, por el Teorema de los valores intermedios se deduce que la imagen de la función es $(-\infty, f(e^2 - 1)] = (-\infty, \dfrac{2}{e}]$

Conclusión: la gráfica de f tendrá el siguiente aspecto:



$\boxed{2}$

(a) (8 puntos) Demostrar que la ecuación $\ln(x+2y) - y = 0$ define una función implícita $y = f(x)$ alrededor del punto $x = 1, y = 0$, que es dos veces derivable. Hallar los valores de $f'(1)$ y $f''(1)$.

(b) (7 puntos) Hallar, tanto la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$, como el polinomio de Taylor de $f(x)$ en el punto $x = 1$. Representar aproximadamente la gráfica de $f(x)$ cerca del punto $x = 1$.

Solución:

(a) El punto $x = 1$, $y = 0$ satisface la ecuación, pues $\ln(1 + 2 \cdot 0) - \cdot 0 = \ln 1 = 0$; la ecuación está definida por una función $F(x,y) = \ln(x+2y) + 3y$, de clase C^2 y $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2}{x+2y} - 1$, que evaluado en $(1,0)$ tiene el valor $1 \neq 0$. Luego se cumplen las condiciones del TFI y la ecuación define una única función implícita $y = f(x)$ en cierto intervalo de centro $x = 1$, y tal que $f(1) = 0$. Para hallar $f'(1)$, derivamos la ecuación con respecto a x y substituimos los valores $x = 1$ y $y = 0$:

$$\frac{1+2y'}{x+2y} - y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + 2f'(1) - f'(1) = 0 \quad \Rightarrow f'(1) = -1.$$

Para cacular $f''(1)$, derivamos en $\dfrac{1+2y'}{x+2y} - y' = 0$ con respecto a x de nuevo, y substituimos los valores $x = 1$, $y = 0$ y $y' = -1$, para obtener

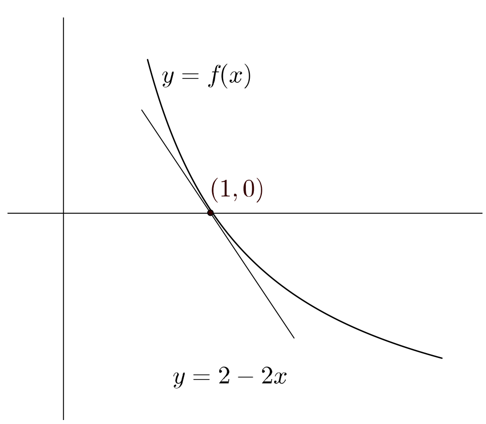
$$\frac{2y''(x+2y) - (1+2y')^2}{(x+2y)^2} - y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y'' - (1-2)^2 - y'' = 0 \quad \Rightarrow f''(1) = 1.$$

(b) Por (a), la recta tangente está dada por $y - f(1) = f'(1)(x-1) = -(x-1)$.

El polinomio de Taylor de segundo orden es

$$P_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 = -(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2.$$

La gráfica de la función implícita cerca de $x = 1$ se muestra en la figura. La función es decreciente y convexa en un entorno del punto.



$\boxed{3}$

Sea $C'(x) = a+10x$ la función de costes marginales y $C_0 = 80$ los costes fijos de una empresa monopolista, siendo $x \geqslant 0$ el número de unidades producidas de cierta mercancía. Se pide:

(a) (8 puntos) Determinar la producción x_0 que minimice el coste medio de dicha empresa.
Sugerencia: la producción x_0 puede depender de a o no.

(b) (7 puntos) Supongamos ahora que la función de demanda es $p(x) = 100 - 5x$. Determinar a de modo que el beneficio máximo se alcance en la producción $x = 4$.

Solución:

(a) En primer lugar, calculamos la función de costes: $C(x) = 80 + ax + 5x^2$

Luego la función de costes medios será: $\dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{80}{x} + a + 5x$

Si calculamos el punto crítico de esta función:

$$\left(\frac{C(x)}{x}\right)' = -\frac{80}{x^2} + 5 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = 16 \Longleftrightarrow x = 4;$$

Y, como la función de costes medios es convexa, ya que:

$$\left(\frac{C(x)}{x}\right)'' = \frac{160}{x^3} > 0$$

deducimos que $x = 4$ es el único minimizador global de la función de costes medios.

a puede tomar cualquier valor.

(b) La función de beneficios es: $B(x) = (100 - 5x)x - (80 + ax + 5x^2) = -10x^2 + (100 - a)x - 80$.

Si calculamos su dos primeras derivadas: $B'(x) = -20x + 100 - a$; $B"(x) = -20 < 0$ observamos que $B'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \dfrac{100 - a}{20} = 4 \Longleftrightarrow a = 20$, luego $x = 4$ sería el único punto crítico de la función $B(x)$.

Y, como dicha función de beneficios es cóncava, dicho punto crítico es el único maximizador global, cuando $a = 20$.

$\boxed{4}$

Dada la función $f(x) = xe^{2-x}$, se pide:

(a) (5 puntos) Calcular los intervalos de concavidad y convexidad, así como los puntos de inflexión de $f(x)$.

(b) (10 puntos) Hallar y clasificar los extremos globales de $f(x)$ en el intervalo $[0, 3]$.
Sugerencia para (b): Use que $2 < e < 3$, o estudie la monotonía de f.

Solución:

(a) Calculemos las derivadas primera y segunda de esta función.

$f\,'(x) = e^{2-x} - xe^{2-x} = (1-x)e^{2-x}$;

$f''(x) = -e^{2-x} - (1-x)e^{2-x} = (x-2)e^{2-x}$

Luego f es cóncava si $x < 2$, puesto que $f''(x) < 0$

Luego f es convexa si $x > 2$, puesto que $f''(x) > 0$

Y, por tanto, $x = 2$ es el único punto de inflexión.

(b) El único punto que anula la derivada de $f(x)$ es $x = 1$, por el apartado (a). Dado que las hipótesis del Teorema de Weierstrass se cumplen, los candidatos a extremo global son 0, 1 y 3. Al evaluar la función, encontraremos el valor máximo y el valor mínimo: $f(0) = 0$, $f(1) = e$ y $f(3) = \frac{3}{e}$. Claramente, $x = 0$ es el mínimo global y $x = 1$ es el máximo global dado que

$$f(0) = 0 < f(3) = \frac{3}{e} < 1 < e = f(1).$$

Otra forma: como f es creciente si $x < 1$ y decreciente si $x > 1$, entonces f alcanza su máximo global (incluso en toda la recta) en $x = 1$. Como $f(0) = 0 < f(3) = \frac{3}{e}$, entonces f alcanza su mnimo en $[0, 3]$ en el punto $x = 0$.