<u>Universidad Carlos III de Madrid</u>

Ejercicio	1	2	3	4	Total
Puntos					

Departamento de Economía

Introducción a las Matemáticas para le Economía **Examen Final** **8 enero 2026**

Duración: 1 hora y 35 minutos.

APELLIDOS:		**NOMBRE:**
ID:	**GRADO:**	**GRUPO:**

(1) **Sea la función $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$, definida en la recta real. Se pide:**

(a) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos globales, las asíntotas y la imagen de $f(x)$.

(b) Hallar los intervalos de concavidad, convexidad y puntos de inflexión de $f(x)$. Representar la gráfica de $f(x)$.

(c) Considerar $f_1(x)$ y $f_2(x)$ la función $f(x)$ restringida a los intervalos donde $f(x)$ es decreciente, y creciente, respectivamente. Representar $f_1^{-1}(x)$ y $f_2^{-1}(x)$.

Sugerencia para a): $\ln a - b = \ln(a/e^b)$.

0,5 puntos apartado a); 0,3 puntos apartado b); 0,2 puntos apartado c)

---

a) Por un lado, $f\ (x)$ es derivable en toda la recta real. Por otro lado, como $f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, el único punto crítico es $x = 0$.
$f'(x) < 0$ si $x \in (-\infty, 0)$, luego $f\ (x)$ es decreciente en $(-\infty, 0]$.
$f'(x) > 0$ si $x \in (0, \infty)$, luego $f\ (x)$ es creciente en $[0, \infty)$.
Obviamente, de ahí se deduce que $x = 0$ es el minimizador global de $f(x)$ y $f\ (x)$ no tiene máximo global, pues no hay más puntos críticos.
En cuanto a las asíntotas, como la función es par, basta estudiar el problema en ∞ y aplicar simetría en $-\infty$.
Paso 1: $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} f(x)/x = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{\ln(e^x + e^{-x})}{x} = \frac{\infty}{\infty} =$ ((L'Hopital)$= \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{e^x}{e^x} \cdot \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$;
Paso 2: $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} (\ln(e^x + e^{-x}) - \ln e^x) = = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \ln(\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x}) = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \ln(1 + e^{-2x}) = 0.$
Luego $y = x$ es la asíntota de $f(x)$ en ∞ y, por simetría, $y = -x$ es la asíntota de $f(x)$ en $-\infty$.
Finalmente, como $f(0) = \ln 2$, $f(x)$ creciente en $[0, \infty)$ y $\lim f(x) = \infty$,
la imagen de $f(x)$ sería $[\ln 2, \infty)$.

b) Como $f''(x) = \dfrac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \dfrac{4e^x e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} = \dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0$, se deduce que $f(x)$ es convexa en todo $\mathbb{R}$ y, por tanto, no hay puntos de inflexión.
Así pues, la gráfica de la función quedaría, aproximadamente, como se observa en la Figura 1.

c) Como hemos visto, el dominio de $f_1(x)$ es $(-\infty, 0]$ y su imagen es $[\ln 2, \infty)$.
Por otro lado, el dominio de $f_2(x)$ es $[0, \infty)$ y su imagen es $[\ln 2, \infty)$.
Por tanto, el dominio de $f_1^{-1}(x)$ es $[\ln 2, \infty)$ y su imagen es $(-\infty, 0]$.
Así pues, por simetría respecto a la diagonal principal, $f_1^{-1}(x)$ es decreciente y tiene como asíntota oblícua $y = -x$, acercándose a ella desde arriba.
Igualmente, por simetría respecto a la diagonal principal, $f_2^{-1}(x)$ es creciente y tiene como asíntota oblicua $y = x$, acercándose a ella desde abajo.
Conclusión: las gráficas de las funciones inversas serán aproximadamente como se observa en la Figura 2

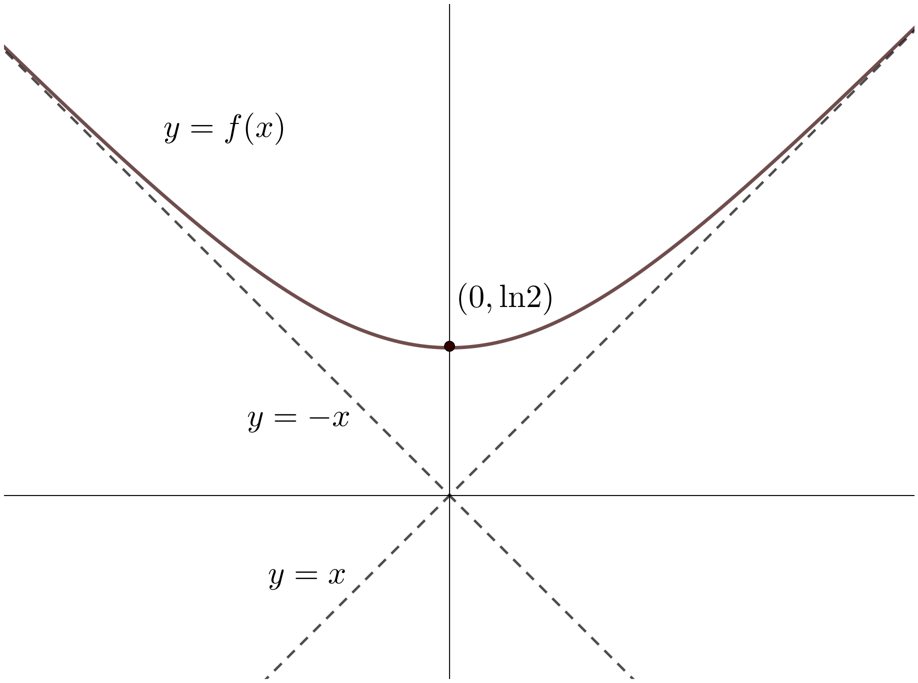

FIGURA 1. Representación de la función.

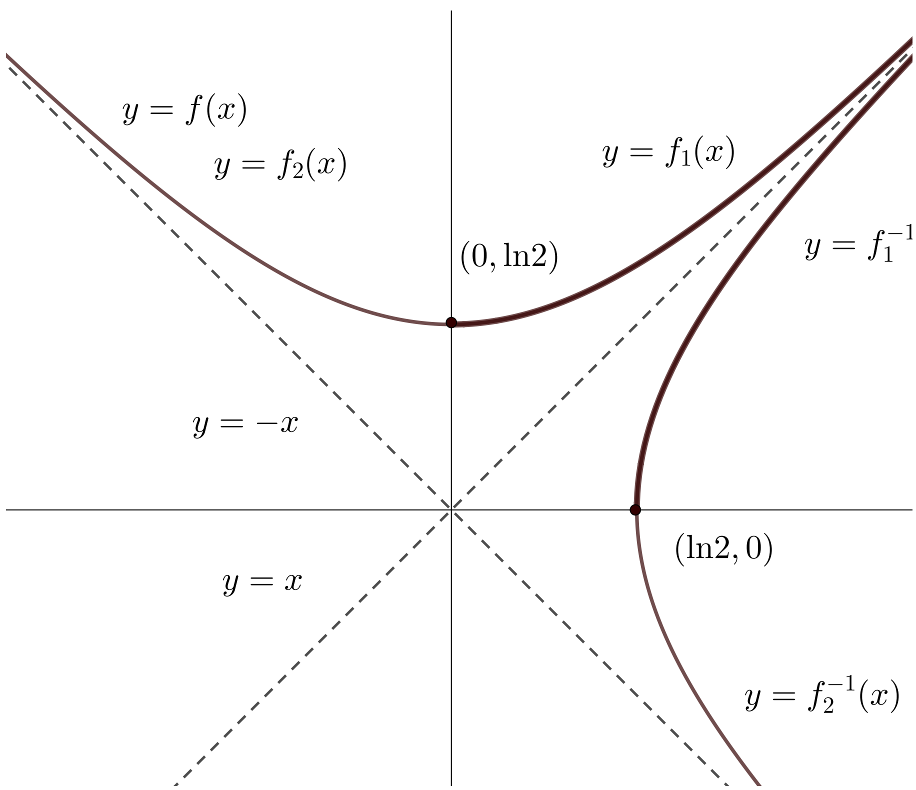

FIGURA 2. Representación de la función inversa.

(2) **Supongamos que la ecuación $e^{y-2} + y - 4x = -1$, define de forma implícita la función $y = f(x)$ en un entorno del punto $x = 1, y = 2$. Se pide:**

(a) Hallar la recta tangente y el polinomio de Taylor de orden 2 de f en $a = 1$.

(b) Representar, aproximadamente, la gráfica de f cerca del punto $x = 1$.

(c) Sea $\delta > 0$ suficientemente pequeño. Calcular aproximadamente los valores de $f(1-\delta)$ y $f(1+\delta)$ utilizando la recta tangente y el polinomio de Taylor de orden 2. Comparar dichas aproximaciones con los valores exactos de $f(1-\delta)$ y $f(1+\delta)$.

0,4 puntos apartado a); 0,3 puntos apartado b); 0,3 puntos apartado c).

---

a) Para hallar la recta tangente derivamos la ecuación $F^{\sim}(x) = F(x, y = f(x)) = -1$:
$y'e^{y-2} + y' - 4 = y'(e^{y-2} + 1) - 4 = 0$
sustituyendo $x = 1,\ y(1) = 2$ se deduce que $y'(1) = f'(1) = 2$.
Luego la ecuación de la recta tangente sería: $y = P_1(x) = 2 + 2(x-1) = 2x$.
Análogamente, calculamos la derivada segunda de la ecuación $F^{\sim}(x) = -1$:
$y''(e^{y-2} + 1) + (y')^2 e^{y-2} = 0$
sustituyendo $x = 1, y(1) = 2, y'(1) = 2$ se deduce que $y''(1) = f''(1) = -2$.
Luego el polinomio de Taylor de orden 2 sería: $P_2(x) = 2x - (x-1)^2$.

b) Utilizando la recta tangente, el polinomio de Taylor de la función hallado en a) y observando que la función es localmente cóncava en el punto, $f''(1) < 0$, la gráfica de la función cerca del punto $(1, 2)$ será, aproximadamente, así (Figura 3):

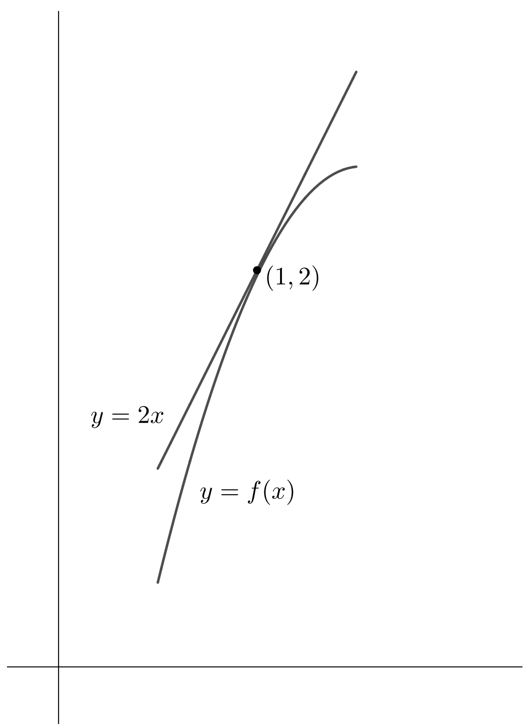

Figura 3. Representación local de la función en el punto (1,2).

c) Utilizando la recta tangente, los valores aproximados de $f(1-\delta)$ y $f(1+\delta)$ serán
$2 - 2\delta$ y $2 + 2\delta$, respectivamente. Por la concavidad de $f(x)$ en $(1-\delta, 1+\delta)$,
dichos valores serán MAYORES que el valor exacto de la función en dichos puntos.
Por otro lado, utilizando el polinomio de Taylor de orden 2, los valores aproximados de $f(1-\delta)$ y $f(1+\delta)$ serán $2 - 2\delta - \delta^2$ y $2 + 2\delta - \delta^2$, respectivamente.
Dichos valores serán una mejor aproximación al valor exacto de la función en dichos puntos, pero no podemos saber si son mayores o menores que el valor exacto sin calcular una derivada de orden superior de la función implícita.

(3) **Sea $C(x) = 9 + 2x + x^2$ la función de costes y $p(x) = 14 - 2x$ la función inversa de demanda de una empresa monopolista. Se pide:**

(a) Hallar el nivel de producción para el que se maximiza el beneficio.

(b) Hallar el nivel de producción para el que se minimiza el coste medio.

(c) El gobierno quiere aumentar la producción hallada en a), así que se propone a la empresa producir al nivel hallado en b). ¿Cual será la reacción de la empresa?

(d) El gobierno está inseguro sobre la reacción de la empresa en el caso c), así que propone hacerse cargo de todos los costes. ¿Aumentará así la producción?

0,3 puntos apartado a); 0,3 puntos apartado b); 0,2 puntos apartado c); 0,2 puntos apartado d).

---

a) En primer lugar, calculamos la función de beneficios.
$B(x) = (14 - 2x)x - (9 + 2x + x^2) = -3x^2 + 12x - 9$
Si calculamos la primera y segunda derivada de B :
$B'(x) = -6x + 12; B''(x) = -6 < 0$
luego vemos que B tiene un único punto crítico en $x^* = 2$ y, como B es una función cóncava, este punto crítico es el único maximizador global.

b) Como la función de costes medios es $\dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{9}{x} + 2 + x$, su derivada sería: $\left(\dfrac{C(x)}{x}\right)' = -\dfrac{9}{x^2} + 1 = 0 \Longleftrightarrow$ $\hat{x} = 3$, único punto crítico válido.
Como $\left(\dfrac{C(x)}{x}\right)'' = \dfrac{18}{x^3} > 0$, la función es convexa y el punto crítico sería minimizador global.

c) $B(3) = 0$. Luego la empresa estará indiferente entre producir o no.

d) En este caso, $B(x) = (14 - 2x)x$, es decir, la función de ingresos de a).
Si calculamos la primera y segunda derivada de B: $B'(x) = 14 - 4x$; $B''(x) = -4 < 0$ luego vemos que B tiene un único punto crítico en $x^+ = 3,5$ y, como B es una función cóncava, este punto crítico es el único maximizador global.
Por tanto, la empresa aumentará su producción.

(4) **Sea** $h(x) = xe^{2x-1} + 8(x-1)^3$**. Se pide:**

(a) Enunciar el teorema de los ceros de Bolzano para $h(x)$ en $[a, b]$.

(b) Estudiar cuantos ceros tiene la función $h(x)$ en toda la recta real.

Sugerencia para b): representar las funciones $f(x) = xe^{2x-1}$ y $g(x) = -8(x-1)^3$ y considerar por separado los casos $x < 0$ y $x > 0$

(c) Hallar un cero de la función $h(x)$ con un error menor que $1/4$.

0,2 puntos apartado a); 0,5 puntos apartado b); 0,3 puntos apartado c).

---

a) Las hipótesis, o condiciones iniciales, son que h sea continua en $[a, b]$ y que $h(a) \cdot h(b) < 0$.
La tesis, o conclusión, es que existe $c \in (a, b)$ tal que $h(c) = 0$.

b) Estudiar los ceros de $h(x) = f(x) - g(x) = 0 \iff f(x) = g(x)$, es decir, es equivalente a encontrar cuántas veces se cortan las funciones $f(x)$ y $g(x)$.
$f(x) \leq 0$ si $x \leq 0$, mientras que $g(x) \geqslant 8$ si $x \leq 0$. Luego $h(x) = f(x) - g(x) < 0$ si $x \leq 0$.
Por otro lado, $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en los reales, $f(0) = 0 < g(0) = 8$, $f(x)$ es creciente en $[0, \infty)$, y $g(x)$ decreciente en ese mismo intervalo (de hecho, $g(x)$ es decreciente en toda la recta real).
Además, $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} g(x) = -\infty$.
Por tanto, las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ tienen un único punto de corte en x^*. Dicho punto de corte es el cero de la función $h(x)$.

c) Observando el dibujo y tomando valores: $h(0) = f(0) - g(0) = -8 < 0$, $h(1) = f(1) - g(1) = e > 0$, así que el cero de $h(x)$ está en el intervalo $(0, 1)$. Por otro lado, $h(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - g(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} < 0$, $h(1) > 0$ así que el cero de $h(x)$ está en el intervalo $(\frac{1}{2}, 1)$.
Por tanto, podemos tomar como cero de $h(x)$ el valor $\frac{3}{4}$ con un error menor que $\frac{1}{4}$.
La Figura 4 clarifica la situación.

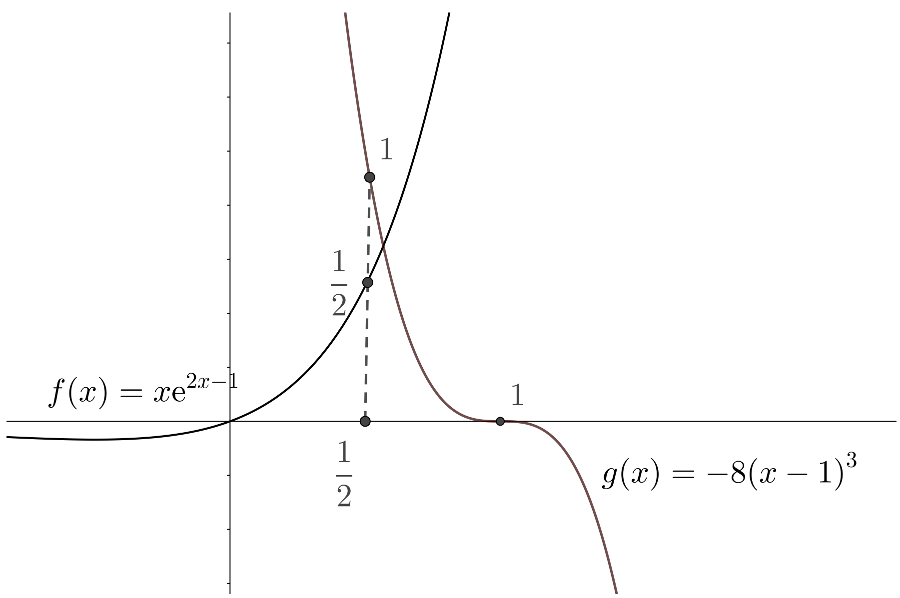

FIGURA 4. Representación de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.