Universidad Carlos III de Madrid

Ejercicio	1	2	3	4
Puntos				

Departmento de Economía **Introducción a Matematicas - Examen Final** **9 enero 2025**

Duración: 1 hora y 35 minutos.

APELLIDOS: **NOMBRE:**

ID: **GRADO:** **GRUPO:**

(1) **Sea la función $f(x) = e^{6x-x^2}$. Se pide:**

(a) Hallar las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

(b) Hallar los extremos locales y globales y la imagen de $f(x)$. Representar la gráfica de la función.

(c) Considerar $f_1(x)$ la función $f(x)$ restringida al intervalo donde es creciente. Representar la gráfica de la inversa de $f_1(x)$.

0,4 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b); 0,2 puntos apartado c).

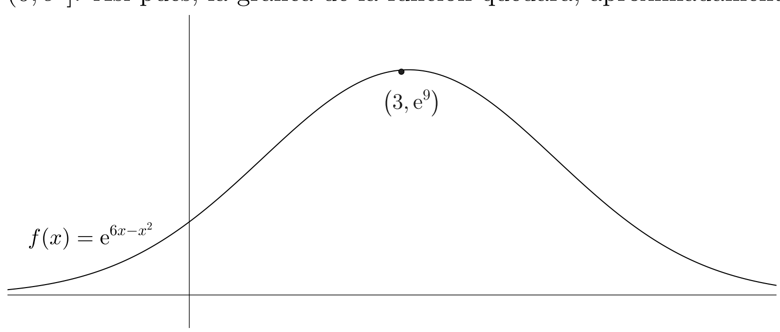
---

a) El dominio de la función anterior es $\mathbb{R}$. Como f es continua en su dominio, solo hay que estudiar las asíntotas en $-\infty$ y en ∞. Observando que $\lim\limits_{x\longrightarrow\pm\infty}(6x-x^2) = -\infty$, se deduce que $y = 0$ es la asíntota horizontal de la función en $\pm\infty$.

Por otro lado, como $f'(x) = e^{6x-x^2}(6-2x)$, obtenemos que $x = 3$ es el único punto crítico y se deduce que f es creciente en $(-\infty, 3]$, pues $f'(x) > 0$ en $(-\infty, 3)$. Análogamente, f es decreciente en $[3, \infty)$.

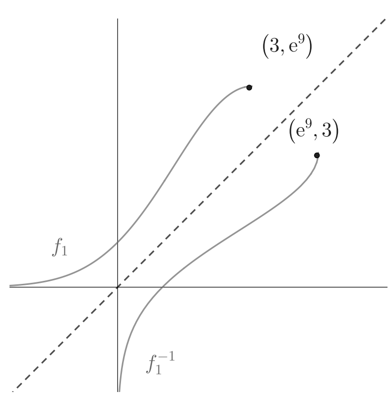
b) De lo anterior se deduce que $x = 3$ es un maximizador local y global. Además, al no existir minimizador local, no lo puede haber global.

Por otro lado, como f es continua en todo $\mathbb{R}$, monótona en los intervalos citados y $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} f(x) = 0$, por el teorema de los valores intermedios se deduce que la imagen de la función será $(0, f(3)] = (0, e^9]$. Así pues, la gráfica de la función quedará, aproximadamente, así:



c) Como se puede apreciar, f_1 es creciente en $(-\infty, 3]$, $f_1(3) = e^9$ y $f_1(x)$ tiene como asíntota horizontal $y = 0$ en $-\infty$ y su imagen es $(0, e^9]$.

Luego su inversa estará definida y será creciente en $(0, e^9]$, tomará el valor 3 en el punto e^9, tendrá como asíntota vertical la recta $x = 0$ y su gráfica será, aproximadamente, así:



(2) **Dada la función $y = f(x)$, definida de forma implícita mediante la ecuación $x^2 - x + e^{-y} = 1$ en un entorno del punto $x = 0$, $y = 0$, se pide:**

(a) Hallar la recta tangente y el polinomio de Taylor de grado 2 de f en $a = 0$.

(b) Representar, aproximadamente, la gráfica de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ cerca del punto $x = 0$.

(c) Hallar la expresión analítica de $f^{-1}(x)$.

Sugerencia para c: Si $y = f(x)$ satisface la ecuación $F(x, y) = C$, entonces $y = f^{-1}(x)$ satisfará la ecuación $F(y, x) = C$.

0,4 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b); 0,2 puntos apartado c).

---

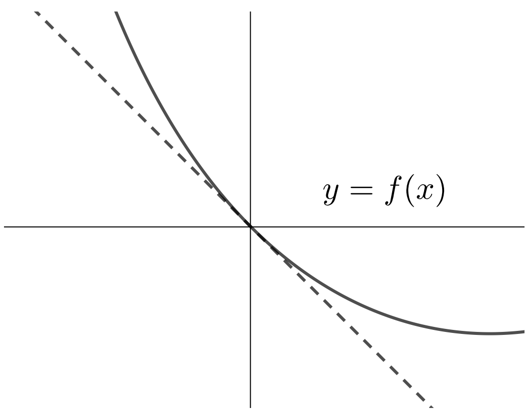
a) En primer lugar, calculamos la derivada primera de la función: $2x - 1 - y'e^{-y} = 0$ sustituyendo $x = 0$, $y(0) = 0$ se deduce que $y'(0) = f'(0) = -1$.

Luego la ecuación de la recta tangente será: $y = P_1(x) = -x$.

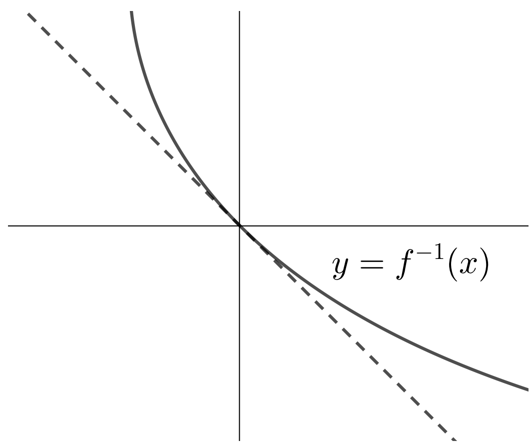
Análogamente, calculamos la derivada segunda de la función: $2+(-y''+(y')^2)e^{-y} = 0$ sustituyendo $x = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$ se deduce que $y''(0) = f''(0) = 3$.

Luego la ecuación del polinomio de Taylor será: $y = P_2(x) = -x + \frac{3}{2}x^2$

b) Utilizando el polinomio de Taylor de orden 2 para dibujar $f(x)$ cerca del punto $x = 0$, y la simetría de la inversa respecto a la diagonal ($y = x$), el dibujo será, aproximadamente, así:



(A) Gráfica de $f(x)$



(B) Gráfica de $f^{-1}(x)$

c) Como $y = f^{-1}(x)$ satisface la ecuación $y^2 - y + e^{-x} = 1 \iff y^2 - y + e^{-x} - 1 = 0$ se deduce que:

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(e^{-x} - 1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5 - 4e^{-x}}}{2}.$$

¿Qué signo elegir? Una posibilidad es observar que (0,0) debe cumplir dicha ecuación.

Así pues, $0 = \dfrac{1 \pm \sqrt{5 - 4e^{-0}}}{2}$, luego $y = \dfrac{1 - \sqrt{5 - 4e^{-x}}}{2}$.

Otra forma, observando que $f^{-1}(x)$ es decreciente. Como e^{-x} es decreciente,la función $\sqrt{5 - 4e^{-x}}$ es creciente, de ahí la necesidad de elegir el signo negativo.

(3) **Sea $C(x) = 16 + 5x + 4x\sqrt{x}$ la función de costes y $p(x) = 35 - \sqrt{x}$ la función inversa de demanda de una empresa monopolista. Se pide:**

(a) Hallar $x^{\hat{}}$ donde se maximiza el beneficio.

(b) Hallar x^* donde se anula la derivada del coste medio, y comprobar que dicha función NO es convexa.

(c) ¿Es x^* el minimizador global de la función de costes medios?

Sugerencia para c): representar aproximadamente la función $\dfrac{C(x)}{x}$.

0,4 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b); 0,2 puntos apartado c).

---

a) En primer lugar, calculamos la función de beneficios.

$B(x) = (35 - \sqrt{x})x - (16 + 5x + 4x\sqrt{x}) = -5x\sqrt{x} + 30x - 16$

Calculamos la primera y segunda derivada de $B(x)$:

$B'(x) = -\dfrac{15}{2}\sqrt{x} + 30; \qquad B''(x) = -\dfrac{15}{4\sqrt{x}} < 0$

Vemos que B tiene un único punto crítico en $x^{\hat{}} = \left(2 \cdot \dfrac{30}{15}\right)^2 = 16$ y, como B es una función cóncava, este punto crítico es el único maximizador global.

b) La función de costes medios es $\dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{16}{x} + 5 + 4\sqrt{x}$, con $x \neq 0$,

Calculamos la primera y segunda derivada de la función de costes medios:

$\left(\dfrac{C(x)}{x}\right)' = -\dfrac{16}{x^2} + \dfrac{4}{2\sqrt{x}}; \qquad \left(\dfrac{C(x)}{x}\right)'' = \dfrac{32}{x^3} - \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

y vemos que tiene un único punto crítico cuando: $-\dfrac{16}{x^2} + \dfrac{4}{2\sqrt{x}} = 0 \Longleftrightarrow x^2 = 8\sqrt{x} \Longleftrightarrow$

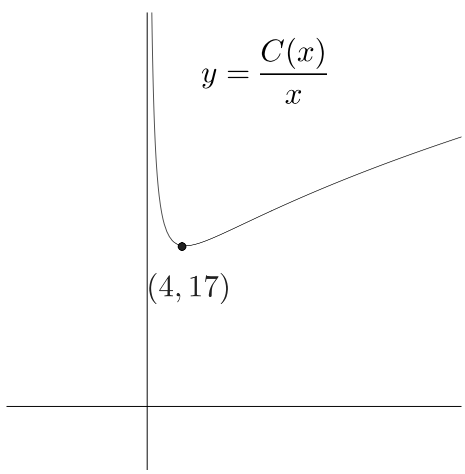
$(\sqrt{x})^3 = 8 \Longleftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Longleftrightarrow x^* = 4$, con $\left(\dfrac{C(4)}{4}\right)'' = \dfrac{32}{64} - \dfrac{1}{8} > 0$ y por lo tanto $x^* = 4$ es un minimizador local.

Sin embargo tomando $x = 100$, $\left(\dfrac{C(100)}{100}\right)'' = \dfrac{32}{1000000} - \dfrac{1}{1000} < 0$, luego la función No es convexa y no podemos asegurar que el punto crítico sea el minimizador global de los costes medios.

c) Estudiando el crecimiento de la función a partir del signo de su derivada primera observamos que:

$\left(\dfrac{C(x)}{x}\right)' < 0$ si $x < 4$; y $\left(\dfrac{C(x)}{x}\right)' > 0$ cuando $x > 4$.

Por lo tanto, $\dfrac{C(x)}{x}$ es decreciente en $(0, 4]$ y creciente en $[4, \infty)$, luego el punto crítico es el único minimizador global de $\dfrac{C(x)}{x}$, como podemos apreciar en la figura:



(4) **Sea** $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + a^2 & x < 2 \\ x^2 - 7x + 12 & x \geqslant 2 \end{cases}$ **Se pide:**

(a) Enunciar el teorema de Bolzano de los ceros para una función f definida en $[1, K]$, donde $K > 2$. Determinar qué condiciones han de cumplir a y K para que $f(x)$ cumpla las hipótesis de dicho teorema.

(b) Enunciar el teorema del valor medio (de Lagrange) para una función f definida en $[-1, 2]$. Hallar a para que se satisfagan las hipótesis del teorema.
Para esos valores de a, hallar el/los punto(s) c que satisfacen la tesis de dicho teorema.
0,5 puntos apartado a); 0,5 puntos apartado b).

---

a) Las hipótesis son que f sea continua en $[1, K]$ y que, además, $f(1) \cdot f(K) < 0$.
La tesis, o conclusión, es que existe $c \in (1, K)$ tal que $f(c) = 0$.
Para ello, necesitamos, en primer lugar, imponer la continuidad de f en $x = 2$.
Como $\lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = a^2$, $f(2) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = 2$,
se deduce que la función será continua en $[0, K]$ cuando $a = \pm\sqrt{2}$.
Por otro lado, suponiendo f continua, tenemos que $f(1) = -1 + a^2 = -1 + (\pm\sqrt{2})^2 = 1 > 0$,
luego la condición $f(1) \cdot f(K) < 0$ se cumplirá cuando $f(K) < 0$.
Por otro lado, tenemos que $x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$, luego $f(K) < 0$ cuando $3 < K < 4$.
Así pues, las hipótesis del teorema de Bolzano se cumplen si $a = \pm\sqrt{2}$, y además $3 < K < 4$.

b) Las hipótesis son que f sea continua en $[-1, 2]$ y derivable en $(-1, 2)$.
La tesis, o conclusión, es que existe $c \in (-1, 2)$ tal que $f(2) - f(-1) = 3f'(c)$.
Hemos visto que la función será continua en $[-1, 2]$ cuando $a = \pm\sqrt{2}$.
Y, ahora, NO necesitamos su derivabilidad en $x = 2$.
Como $f(2) - f(-1) = -3 = 3f'(c) = 3(2c - 2)$, se cumple que $2c - 2 = -1 \Longrightarrow c = 1/2 \in (-1, 2)$.