

Ejercicio	1	2	3	4	Total
Puntos					

Departamento de Economía

Introducción a las Matemáticas para la Economía

Examen Final

11 enero 2023

Duración: 1 hora 40 min

APELLIDOS:	NOMBRE:
ID:	GRUPO:

(1) Sea la función $f(x) = (x^2 - 4)^{\frac{2}{3}}$, definida en $[0, \infty)$. Se pide:

- Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos globales y la imagen de $f(x)$.
- Hallar los intervalos de concavidad y convexidad, los puntos de inflexión de $f(x)$ y representar la gráfica de la función.
- Considerar $f_b(x)$ la función $f(x)$ restringida al intervalo $[0, b]$, donde $b \geq 2$. Hallar el máximo global (y los maximizadores globales) de $f_b(x)$.

0,4 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b); 0,2 puntos apartado c)

- Por un lado, $f(x)$ es continua en todo su dominio. Por otro lado, como $x^{\frac{2}{3}}$ es derivable excepto en $x = 0$, $f(x)$ es derivable excepto cuando $x^2 - 4 = 0$; esto es, cuando $x = 2$.

Y como $f'(x) = 2 \frac{2x}{3(x^2 - 4)^{\frac{1}{3}}}$, los puntos críticos son $x = 0$ y $x = 2$.

$f'(1) < 0$, luego $f'(x) < 0$ si $x \in (0, 2)$, luego $f(x)$ es decreciente en $[0, 2]$.

$f'(3) > 0$, luego $f'(x) > 0$ si $x \in (2, \infty)$, luego $f(x)$ es creciente en $[2, \infty)$.

Obviamente $x = 2$ es el minimizador global de $f(x)$, pues $f(2) = 0 < f(x)$ si $x \neq 2$.

Por otro lado, $f(x)$ no tiene máximo global, pues $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

Finalmente, por lo anterior, la imagen de $f(x)$ sería $[0, \infty)$.

- Para cualquier $x \neq 2$ existe $f''(x)$. Y como

$$f''(x) = \frac{4(x^2 - 4)^{\frac{1}{3}} - x \cdot (\frac{1}{3})(x^2 - 4)^{-\frac{2}{3}} 2x}{(x^2 - 4)^{\frac{2}{3}}} =$$

multiplicando numerador y denominador por $3(x^2 - 4)^{\frac{2}{3}}$

$$= \frac{4 \cdot 3(x^2 - 4) - 2x^2}{9(x^2 - 4)^{\frac{4}{3}}} = \frac{4x^2 - 12}{9(x^2 - 4)^{\frac{4}{3}}}$$

la derivada segunda se anula en $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

$f''(1) < 0$, luego $f''(x) < 0$ si $x \in (0, 2)$, luego $f(x)$ es cóncava en $[0, 2]$.

$f''(3) < 0$, luego $f''(x) < 0$ si $x \in (2, 2\sqrt{3})$, luego $f(x)$ es cóncava en $[2, 2\sqrt{3}]$.

$f''(4) > 0$, luego $f''(x) > 0$ si $x \in (2\sqrt{3}, \infty)$, luego $f(x)$ es convexa en $[2\sqrt{3}, \infty)$.

De lo anterior se deduce que $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ es un punto de inflexión.

Observación: ni $x = 2$ es un punto de inflexión ni $f(x)$ es cóncava en $[0, 2\sqrt{3}]$,

pues el segmento que une $(1, f(1))$ con $(3, f(3))$ no queda debajo de gráfica de $f(x)$ en el punto $x = 2$.

Así pues, la gráfica de la función quedaría, aproximadamente, como se puede ver al final.

- Como hemos visto, $f(x)$ es decreciente en $[0, 2]$ y creciente en $[2, \infty)$.

Así pues, llamando x^* al único punto del intervalo $(2, \infty)$ que cumple:

$f(x^*) = f(0) = 4^{\frac{2}{3}}$, se cumple que:

si $b < x^* \implies \text{Max}(f_b) = f(0)$; maximizador $(f_b) = \{0\}$.

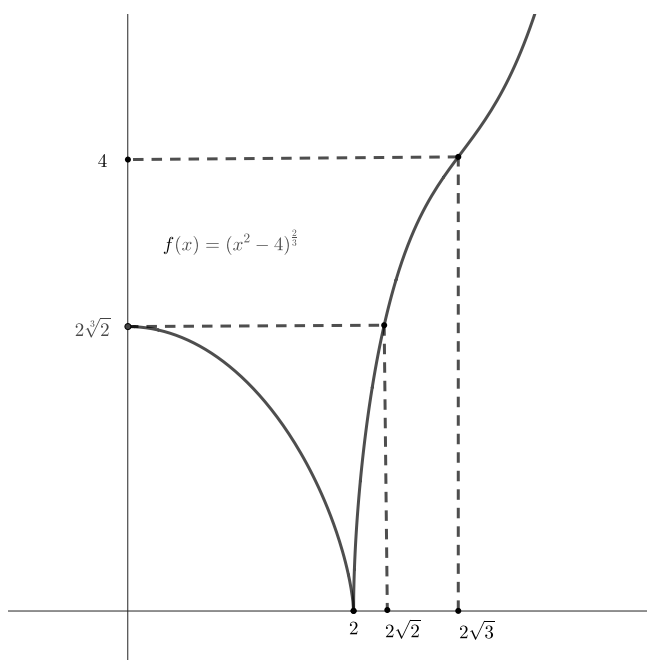
si $b = x^* \implies \text{Max}(f_b) = f(0)$; maximizador $(f_b) = \{0, x^*\} = \{0, b\}$.

si $b > x^* \implies \text{Max}(f_b) = f(b)$; maximizador $(f_b) = \{b\}$.

¿Cuanto vale x^* ? Como $f(x^*) = (x^{*2} - 4)^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}} \implies$

$$x^{*2} - 4 = 4 \implies x^{*2} = 8 \implies x^* = 2\sqrt{2}$$

Ver, de nuevo, la gráfica de la función.



(2) Dada la función $y = f(x)$, definida de forma implícita mediante la ecuación $4x^2 + 2y - y^3 = 1$ en un entorno del punto $x = 0, y = 1$, se pide:

- Hallar la recta tangente y el polinomio de Taylor de grado 2 de f en $a = 0$.
- Representar, aproximadamente, la gráfica de f cerca del punto $x = 0$. mall 0,4 puntos apartado a); 0,2 puntos apartado b); 0,4
- Considerar $f_\delta(x)$ la función anterior, restringida a un intervalo $[0, \delta)$. Representar la inversa de dicha función.

Calcular, aproximadamente, utilizando el polinomio de Taylor de $f_\delta(x)$, su inversa.

Sugerencia para b y c: utilizar que $f''(0) > 0$.

puntos apartado c).

- Antes de nada, observamos que el punto $(0, 1)$ satisface la ecuación.

A continuación, en primer lugar, calculamos la derivada primera de la función:

$$8x + 2y' - 3y^2y' = 0$$

sustituyendo $x = 0$, $y(0) = 1$ se deduce que $y'(0) = f'(0) = 0$.

Luego la ecuación de la recta tangente sería: $y = P_1(x) = 1$.

Análogamente, calculamos la derivada segunda de la función:

$$8 + 2y'' - 3y^2y'' - 6y(y')^2 = 0$$

sustituyendo $x = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$ se deduce que $y''(0) = f''(0) = 8$.

Luego la ecuación del polinomio de Taylor sería: $y = P_2(x) = 1 + 4x^2$

- Utilizando el polinomio de Taylor de orden 2, la gráfica de f , cerca del punto $x = 0$. sería, aproximadamente, como se ve en la figura al final.

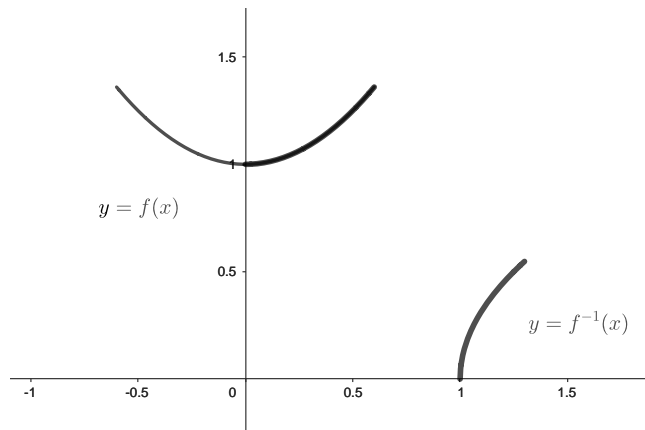
- La gráfica de la inversa de la función $f_\delta(x)$ por simetría respecto a la diagonal principal, vendría dada, aproximadamente, de la forma que indica el dibujo.

Por otro lado, utilizando el polinomio de Taylor, tenemos que, para $x \approx 0$:

$f_\delta(x) \approx 1 + 4x^2$, luego la inversa del polinomio de Taylor, para valores de $x \geq 0$,

vendría dada por la ecuación: $1 + 4y^2 = x \implies y^2 = (x - 1)/4 \implies y = \frac{1}{2}\sqrt{x - 1}$

Luego $f_\delta^{-1}(x) \approx \frac{1}{2}\sqrt{x - 1}$, cuando $x \approx 1, x \geq 1$.



(3) Sea $C(x) = C_0 + 2x + x^2$ la función de costes y $p(x) = a - 5x$ la función inversa de demanda de una empresa monopolista, donde $a, C_0 > 0, x \geq 0$. Se pide:

- (a) Si sabemos que el nivel de producción para el que se maximiza el beneficio es $x^* = 4$, calcular el valor del parámetro a .
- (b) Si sabemos que el nivel de producción para el que se minimiza el coste medio es $x^* = 4$, calcular el valor del parámetro C_0 .
- (c) Enunciar el teorema de Rolle. Para la función de beneficios del apartado a), hallar los intervalos $[\alpha, \beta]$ donde:
 - (i) se cumplen las hipótesis del teorema.
 - (ii) se cumple la tesis del teorema (aunque quizás no se cumplan las hipótesis).

0,4 puntos apartado a); 0,3 puntos apartado b); 0,3 puntos apartado c).

- a) En primer lugar, calculamos la función de beneficios.

$$B(x) = (a - 5x)x - (C_0 + 2x + x^2) = -6x^2 + (a - 2)x - C_0$$

Si calculamos la primera y segunda derivada de B :

$$B'(x) = -12x + a - 2; B''(x) = -12 < 0$$

luego vemos que B tiene un único punto crítico en $x^* = \frac{a-2}{12}$ y, como B es una función cóncava, este punto crítico es el único maximizador global.

$$\text{Luego } x^* = 4 = \frac{a-2}{12} \implies a = 50$$

- b) Como la función de costes medios es $\frac{C(x)}{x} = \frac{C_0}{x} + 2 + x$,

$$\text{su derivada sería: } \left(\frac{C(x)}{x} \right)' = -\frac{C_0}{x^2} + 1 = 0 \iff x^2 = C_0.$$

Como $\left(\frac{C(x)}{x} \right)'' = \frac{2C_0}{x^3} > 0$, la función es convexa y el punto crítico sería minimizador global.

$$\text{Luego } x^* = 4 \implies C_0 = 16$$

- c) La hipótesis es que, en el intervalo $[\alpha, \beta]$, $B(x)$ debe ser continua, en el intervalo (α, β) , $B(x)$ debe ser derivable y, además, $B(\alpha) = B(\beta)$.

Como $B(x)$ es una parábola, la gráfica es simétrica respecto a la recta $x = 4$,

luego $0 \leq \alpha < \beta$ debe cumplir que $(\alpha + \beta)/2 = 4$.

La tesis es que existe $\gamma \in (\alpha, \beta)$ que cumple $B'(\gamma) = 0$.

Obviamente, se cumple si $0 \leq \alpha < 4 < \beta$, pues $B'(4) = 0$.

(4) Sea $f(x) = \begin{cases} \sqrt{3+e^{2x}} & , x \leq 0 \\ \sqrt{a-be^{-x}} & x > 0 \end{cases}$, definida a trozos en \mathbb{R} , donde $a > b > 0$. Se pide:

- Determinar qué condiciones han de cumplir a y b para que $f(x)$ sea derivable en $x = 0$.
- Estudiar si dicha función tiene asíntota en $-\infty$, así como la concavidad/convexidad de $f(x)$ en $(-\infty, 0)$.
- Estudiar la monotonía y dibujar la gráfica de $f(x)$ definida solamente en $(-\infty, 0]$.

0,4 puntos apartado a); 0,3 puntos apartado b); 0,3 puntos apartado c).

- a) Necesitamos, en primer lugar, imponer la continuidad de f en $x = 0$.

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \sqrt{a-b}$, y como $f(0) = 2 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ se deduce que la función sería continua en $x = 0$ cuando:

$$a - b = 4.$$

Por otro lado, suponiendo f continua, la función sería derivable en $x = 0$ cuando:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = f'(0^+)$ sea igual a $f'(0^-)$. Y ahora tenemos que:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{be^{-x}}{2\sqrt{a-be^{-x}}} = \frac{b}{2\sqrt{a-b}} = \frac{b}{4};$$

$$\text{ii) } x < 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{2e^{2x}}{2\sqrt{3+e^{2x}}} \Rightarrow f'(0^-) = \frac{2}{4}.$$

Por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = 0$ cuando $b = 2, a = 6$.

- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3+e^{2x}} = \sqrt{3}$. Luego $y = \sqrt{3}$ asíntota horizontal en $-\infty$.

Respecto a la convexidad/concavidad, observamos que:

$$x < 0 \Rightarrow f''(x) = \frac{2e^{2x}\sqrt{3+e^{2x}} - e^{2x}(2e^{2x}/2\sqrt{3+e^{2x}})}{3+e^{2x}} \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{2e^{2x}(3+e^{2x}) - e^{2x}e^{2x}}{(3+e^{2x})^{3/2}} = \frac{6e^{2x} + e^{4x}}{(3+e^{2x})^{3/2}} > 0.$$

Luego $f(x)$ convexa en $(-\infty, 0)$.

- c) La función es obviamente creciente en $(-\infty, 0]$; con una asíntota horizontal $y = \sqrt{3}$, la gráfica de f sería, aproximadamente, así:

