Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía
Examen final de Matemáticas II. Septiembre de 2004.

IMPORTANTE:

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h. 30min.**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **Sólo se entregará este cuadernillo.** No entregar el papel en sucio. Las respuestas deben escribirse en este cuadernillo ya que sólo se puntuará lo que haya en él.
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Cada apartado del examen puntúa $0'5$ puntos.

Apellidos:		**Nombre:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

(1) Considerar el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 3x - y + 2z &= 1 \\ x + 4y + z &= b \\ 2x - 5y + az &= -2 \end{aligned}$$

donde a y b son parámetros.

(a) Clasificar el sistema según los valores de los parámetros a y b.

(b) Resolver el sistema anterior para los valores de los parámetros a y b en que es compatible indeterminado.

(a) La matriz asociada al sistema es $A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & b \\ 2 & -5 & a & -2 \end{array}\right)$. Haciendo operaciones elementales con filas obtenemos los siguientes sistemas equivalentes al original

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & b \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & a & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & b \\ 0 & -13 & -1 & 1-3b \\ 0 & -13 & a-2 & -2-2b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & b \\ 0 & -13 & -1 & 1-3b \\ 0 & 0 & a-1 & b-3 \end{array}\right)$$

Y observamos que si $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado, ya que en este caso $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|B) = 3$.

Supongamos ahora que $a = 1$. En este caso $\text{rango}(A) = 2$. Si $b \neq 3$, entonces $\text{rango}(A|B) = 3$ y el sistema es incompatible. Finalmente si $a = 1$ y $b = 3$, obtenemos que $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|B) = 2$ y el sistema es compatible indeterminado. Resumiendo, el sistema es:

- COMPATIBLE DETERMINADO: Si $a \neq 1$.
- COMPATIBLE INDETERMINADO: Si $a = 1$ y $b = 3$.
- INCOMPATIBLE: Si $a = 1$ y $b \neq 3$.

(b) En el apartado anterior hemos vemos visto que el sistema es compatible indeterminado si $a = 1$ y $b = 3$. En este caso, el sistema original es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} x + 4y + z &= 3 \\ -13y - z &= -8 \end{aligned}$$

Tomando y como parámetro obtenemos $z = 8 - 13y$, $x = -5 + 9y$.

(2) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Calcular el polinomio característico y los valores propios.
(b) Determinar si la matriz A es diagonalizable.
(c) En caso de que la matriz A sea diagonalizable, calcular su forma diagonal y la matriz de paso.

(a) El polinomio característico es

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

Los valores propios son $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.

(b) Como $\dim S(2) = 1$, la matriz es diagonalizable si y sólo si $\dim S(1) = 2$. Calculamos los espacios de vectores propios asociados al valor propio 1.

El subespacio $S(1)$ de vectores propios asociados al valor propio $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo

$$-x + z = 0$$

por lo que $S(1) = \{(x, y, x) : x, y \in \mathbb{R}\} =< (1, 0, 1), (0, 1, 0) >$. Como $\dim S(1) = 2$, la matriz es diagonalizable.

(c) Calculamos $S(2)$, el subespacio de vectores propios asociados al valor propio $\lambda_3 = 2$. El sistema que lo determina es

$$\left.\begin{array}{rcl} -x & = & 0 \\ -x - y + z & = & 0 \end{array}\right\}$$

por lo que $S(2) = \{(0, y, y) : y \in \mathbb{R}\} =< (0, 1, 1) >$. Por tanto, $A = PDP^{-1}$ con

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) Dada la forma cuadrática $Q(x,y,z) = 2x^2 + ay^2 + az^2 - 2xy - 2xz + 2yz$,

(a) Hallar la forma matricial de Q.

(b) Determinar para qué valores del parámetro a la forma cuadrática Q es definida positiva.

(c) Determinar para qué valores del parámetro a la forma cuadrática Q es indefinida.

(a) La matriz asociada a Q es

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

(b) Tenemos

$$\begin{aligned} D_1 =& 2 \\ D_2 =& \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & a \end{vmatrix} = 2a - 1 \\ D_3 =& \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a(a-1) \end{aligned}$$

Recordemos los siguientes resultados para formas cuadráticas asociadas a matrices simétricas de orden 3×3.

Resultado 1: Si $D_3 \neq 0$, entonces
- Q es definida positiva si y sólo si $D_1, D_2, D_3 > 0$.
- Q es definida negativa si y sólo si $D_1 < 0$, $D_2 > 0$ y $D_3 > 0$.
- En cualquier otro caso, Q es indefinida.

Resultado 2: Si $D_1, D_2 \neq 0$ y $D_3 = 0$, entonces
- Q es semidefinida positiva si y sólo si $D_1, D_2 > 0$.
- Q es semidefinida negativa si y sólo si $D_1 < 0$ y $D_2 > 0$.
- En cualquier otro caso, Q es indefinida.

Estudiamos el signo de los menores principales, según los valores de a.

- Si $a > 1$, entonces $D_1 > 0$, $D_2 > 0$ y $D_3 > 0$.
- Si $a = 1$, entonces $D_1 > 0$, $D_2 > 0$ y $D_3 = 0$.
- Si $0 < a < 1$, entonces $D_1 > 0$, y $D_3 < 0$.
- Si $a \leq 0$, entonces $D_1 > 0$ y $D_2 < 0$.

Por tanto,

(a) La forma cuadrática es definida positiva si y sólo si $a > 1$.

(b) La forma cuadrática es indefinida si y sólo $a < 1$.

(4) Sea $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por

$$f(x,y,z,t) = (x+2y+4z-t, -x+y-z-5t, 2x+y+5z+4t)$$

(a) Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$. Calcular las dimensiones del núcleo $N(f)$ y de la Imagen $\text{Im}(f)$.

(b) Expresar $\text{Im}(f)$ como el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales independientes. Calcular una base del núcleo $N(f)$.

(a) La matriz de f respecto de las bases canónicas es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Haciendo operaciones con filas observamos que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -6 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ x+y \\ z-2x \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ x+y \\ z-2x+(x+y) = z-x+y \end{matrix}$$

por lo que $\text{rango}(A) = 2$. Recordando que $\dim(\text{Im}(f)) = \text{rango}(A)$ y que $4 = \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\ker(f))$, vemos que $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\ker(f)) = 2$.

(b)Del apartado anterior obtenemos que

$$\text{Im}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z-x+y = 0\}$$

Las columnas de A son un sistema generador de $\text{Im}(f)$ el cual,por el apartado anterior, tiene dimensión 2. Como base podemos tomar las dos primeras columnas $\{(1,-1,2),(2,1,1)\}$. Alternativamente, observando las ecuaciones anteriores de $\text{Im}(f)$, vemos que el conjunto $\{(1,0,1),(1,1,0)\}$ también es base de $\text{Im}(f)$.

El núcleo es el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^4$ que son solución del sistema homogéneo siguiente

$$\begin{aligned} x+2y+4z-t &= 0 \\ -x+y-z-5t &= 0 \\ 2x+y+5z+4t &= 0 \end{aligned}$$

Es suficiente tomar las dos primeras ecuaciones (hemos visto que $\text{rango}(A) = 2$). Resolviendo el sistema obtenemos $x = -2z-3t$, $y = -z+2t$, por lo que

$$\ker(f) = \{(-2z-3t, -z+2t, z, t) \in \mathbb{R}^4 : z, t \in \mathbb{R}\} = <(-2,-1,1,0),(-3,2,0,1)>$$

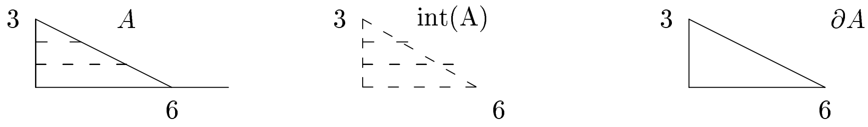
(5) Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y \leq 6, x \geq 0, y \geq 0\}$.

(a) Dibujar el conjunto A, su frontera y su interior. ¿Es A acotado? ¿Es compacto?

(b) Dibujar las curvas de nivel de $f(x, y) = y - x^2$.

(c) Enunciar el Teorema de Weierstrass. Utilizando las curvas de nivel, hallar el máximo y el mínimo de f en A.

(a) El conjunto A, la frontera y el interior son



El conjunto A es cerrado (ya que $\partial A \subset A$) y acotado, por lo que es compacto.

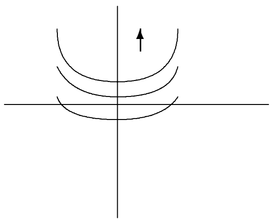
(b) Las curvas de nivel

$$y - x^2 = C$$

son las parábolas

$$y = c + x^2$$

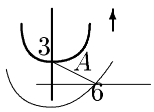
con vértice en el punto $(0, C)$. Gráficamente,



El vector indica la dirección en la que la función crece.

(c) Teorema de Weierstrass: Una función que es continua en un conjunto compacto alcanza un valor máximo y un valor mínimo sobre ese conjunto.

Utilizando las curvas de nivel y teniendo en cuenta el sentido en el que la función crece,



vemos que el máximo se alcanza en el punto $(0, 3)$ y el mínimo en el punto $(6, 0)$.

(6) (a) Escribe la definición de función convexa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Escribe la definición de función estrictamente convexa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

(b) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de varias variables. Suponiendo que las derivadas parciales existen y son continuas, enuncia las condiciones suficientes (en términos del hessiano de f) para que la función f sea estrictamente convexa.

(c) Determinar si la función $f(x,y) = -x^2 + 4xy - 5y^2$ es cóncava o convexa.

(c) El Hessiano de f es

$$\mathrm{H}f(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$$

Como $D_1 = -2 < 0$ y $D_2 = 4 > 0$, vemos que $\mathrm{H}f(x,y)$ es definido negativo en todos los puntos de $\mathbb{R}^2$ por lo que la función es (estrictamente) cóncava en todo $\mathbb{R}^2$.

(7) Dada la función $f(x,y) = xye^{x^2}$,

(a) Calcula el polinomio de Taylor de orden dos de f en torno al punto $(0,1)$.

(b) Utilizando el apartado anterior, calcula razonadamente une aproximación del valor de $e^{(0.2)^2}$.

(a) Observamos que

$$\begin{aligned}
&f(0,1) = 0\\
&\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \left(ye^{x^2} + 2x^2ye^{x^2}\right)\Big|_{x=0,y=1} = \left(2x^2+1\right)ye^{x^2}\Big|_{x=0,y=1} = 1\\
&\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \left(xe^{x^2}\right)\Big|_{x=0,y=1} = 0\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = \left(4xye^{x^2} + 2xy(2x^2+1)e^{x^2}\right)\Big|_{x=0,y=1} = 0\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,1) = \left((2x^2+1)e^{x^2}\right)\Big|_{x=0,y=1} = 1\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) = 0
\end{aligned}$$

Por lo que el polinomio de Taylor es

$$P_2(x,y) = x + x(y-1) = xy$$

(b) Tenemos que

$$f(0'2,1) \approx P_2(0'2,1) = 0'2$$

luego como

$$f(0'2,1) = 0'2 \cdot e^{(0'2)^2}$$

concluimos que

$$e^{(0'2)^2} = \frac{f(0'2,1)}{0'2} \approx \frac{0'2}{0'2} = 1$$

(8) Considerar la función $f(x, y) = x + y + z$ y el conjunto $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 7\}$.
(a) Hallar las ecuaciones de Lagrange que determinan los extremos de f en A.
(b) Determinar los puntos que satisfacen las ecuaciones de Lagrange y clasificar los extremos de f en A.

(a) El lagrangiano del problema de maximización es

$$L = x + y + z + \lambda(7 - x^2 - 2y^2 - 4z^2)$$

Por tanto, las ecuaciones de Lagrange son

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 1 - 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 1 - 4\lambda y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 1 - 8\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 9 \end{aligned}$$

(b) Vemos que $\lambda \neq 0$. Además, obtenemos que

$$\lambda x = 2\lambda y = 4\lambda z$$

Simplificando,

$$x = 2y = 4z$$

y sustituyendo en la última ecuación obtenemos $28z^2 = 7$, es decir $z = \pm\frac{1}{2}$. Por tanto, los puntos críticos son

$$(2, 1, \frac{1}{2}), \qquad (-2, -1, -\frac{1}{2})$$

Sustituyendo en la función objetivo vemos inmediatamente que

$$\begin{aligned} f(2, 1, \frac{1}{2}) &= \tfrac{7}{2} \\ f(-2, -1, -\frac{1}{2}) &= -\tfrac{7}{2} \end{aligned}$$

Luego f alcanza un máximo en el punto $(2, 1, \frac{1}{2})$ y un mínimo en el punto $(-2, -1, -\frac{1}{2})$.