

Universidad Carlos III de Madrid  
Departamento de Economía  
Examen final de Matemáticas II. Mayo de 2013.

---

Apellidos: \_\_\_\_\_ Nombre: \_\_\_\_\_

DNI: \_\_\_\_\_ Titulación: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_

---

**IMPORTANTE**

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **Sólo se entregará este cuadernillo.** Las respuestas deben escribirse en este cuadernillo ya que sólo se puntuará lo que haya en él. Por favor, compruebe que hay 10 páginas en el cuadernillo.
- **NO DESGRAPE LAS HOJAS DEL EXAMEN.**
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Lea las preguntas con cuidado. Todos los apartados del examen valen 1 punto, excepto en los apartados en los que se indica otra puntuación.
- Hay espacio adicional para operaciones al final del examen y detrás de esta página.

Problema	Puntuación
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Total	

ESPACIO PARA HACER OPERACIONES

(1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro  $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z &= 4 \\ 3x - y + 5z &= 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z &= a + 2 \end{cases}$$

se pide:

- Clasifique el sistema según los valores de  $a$ .
- Resuelva el sistema anterior para los valores de  $a$  para los cuales el sistema tenga infinitas soluciones.

---

(2) Considere el conjunto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x + 1, y \leq -x + 1, y > 0\}$  y la función  $f(x, y) = y - x^2$ .

(a) Dibuje el conjunto  $A$ , su frontera y su interior. Determine, justificando las respuestas, si el conjunto  $A$  es cerrado, abierto, acotado, compacto y/o convexo.

(b) (0.5 puntos) ¿Se verifican las hipótesis del Teorema de Weierstrass para el conjunto  $A$  y la función  $f$ ? ¿Por qué?

(c) (1.5 puntos) Dibuje las curvas de nivel de  $f$  indicando la dirección de crecimiento. Utilice las curvas de nivel para determinar, si existe, un valor máximo y/o mínimo global de  $f$  en  $A$ , así como los puntos donde se alcanzan.

---

(3) Consideremos el problema de una empresa que tiene que producir 42 unidades de un cierto producto al menor coste posible. Si la Empresa utiliza  $K$  unidades de capital y  $L$  unidades de trabajo su producción es  $\sqrt{K} + \sqrt{L}$  unidades. Suponemos que los precios de cada unidad de capital y de trabajo son, respectivamente, de 1 y 20 unidades monetarias.

- Plantee el problema de optimización de la empresa. Escriba el Lagrangiano  $\mathcal{L}$  y las ecuaciones de Lagrange.
- Resuelva las ecuaciones de Lagrange encontradas en el apartado anterior. Compruebe las condiciones de segundo orden para los puntos críticos condicionados obtenidos y halle la solución del problema.

Ahora suponga que la empresa quisiera producir 41 unidades. Utilizando los cálculos previos y sin resolver de nuevo el problema, determine una expresión aproximada de cuál sería el ahorro de la empresa en este caso.

---

(4) Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2y + y^2z + z^2x &= 5 \\ x + y + z &= 2 \end{aligned} \quad \left. \right\}$$

(a) Justifique, aplicando el teorema de la función implícita que el sistema de ecuaciones anterior permite obtener las variables  $y, z$  como funciones de  $x$  en un entorno del punto  $(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, 2)$ , de manera que  $x$  y las funciones  $y(x)$ ,  $z(x)$  son soluciones del anterior sistema de ecuaciones que verifican que  $y(1) = -1$ ,  $z(1) = 2$ .

(b) Calcule la aproximación de Taylor de primer orden de las funciones  $y(x)$ ,  $z(x)$  alrededor del punto  $x_0 = 1$ .

---

(5) Considere la función  $f(x, y) = xye^{x+2y}$

- (a) Determine los puntos críticos (si existen) de la función  $f$  en el conjunto  $\mathbb{R}^2$ .
- (b) Clasifique los puntos críticos del apartado anterior en máximos, mínimos (locales o globales) y puntos de silla.

---

(6) Dada la función  $f(x, y) = 2ax^2 - by^2 + 4x - 3$ , discutir, según los valores de los parámetros  $a$  y  $b$  cuándo  $f$  es estrictamente cóncava y/o convexa.

---

ESPACIO PARA HACER OPERACIONES

ESPACIO PARA HACER OPERACIONES

ESPACIO PARA HACER OPERACIONES