Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas II. Mayo de 2012.

Apellidos:		**Nombre:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

IMPORTANTE

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **Sólo se entregará este cuadernillo.** Las respuestas deben escribirse en este cuadernillo ya que sólo se puntuará lo que haya en él. Por favor, compruebe que hay 10 páginas en el cuadernillo.
- **NO DESGRAPE LAS HOJAS DEL EXAMEN.**
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Lea las preguntas con cuidado. Cada apartado del examen vale 1 punto.
- Hay espacio adicional para operaciones al final del examen y detrás de esta página.

Problema	Puntuación
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

(1) *Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales*

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+y & = & 3 \\ x-az & = & 2 \\ y+z & = & b \end{array}\right.$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) *Clasifique el sistema según los valores de* a *y* b.

(b) *Resuelva el sistema anterior para los valores de* a *y* b *para los cuales el sistema tenga infinitas soluciones.*

Solución:

(a) La matrices asociadas al sistema son (después de intercambiar algunas ecuaciones)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -a & 2 \\ 0 & 1 & 1 & b \\ a & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -a & 2 \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & a^2 & 3-2a \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -a & 2 \\ 0 & 1 & a^2 & 3-2a \\ 0 & 0 & 1-a^2 & b-3+2a \end{array}\right) = C$$

Estudiamos los posibles rangos de A y los comparamos con los de $(A|B)$. Se observa claramente que, si $a \neq 1$ y $a \neq -1$, entonces rango(A) = rango$(A|B) = 3$. En estos casos, el sistema es compatible determinado.

Si $a = 1$ entonces

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right)$$

y vemos que si $b = 1$, entonces rango $C = 2 =$ rango A y el sistema es compatible indeterminado con un parámetro. Y si $b \neq 1$, entonces rango $C = 3$, rango $A = 2$ y el sistema es incompatible.

Finalmente, si $a = -1$, entonces

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & b-5 \end{array}\right)$$

y vemos que si $b = 5$, entonces rango $C = 2 =$ rango A y el sistema es compatible indeterminado con un parámetro. Y si $b \neq 5$, entonces rango $C = 3$, rango $A = 2$ y el sistema es incompatible.

(b) El sistema es compatible indeterminado cuando $a = 1, b = 1$ y cuando $a = -1, b = 5$. Para estos valores, el sistema original es equivalente al sistema

$$\left\{\begin{array}{rcr} x-az & = & 2 \\ y+z & = & 3-2a \end{array}\right.$$

cuya solución es $x = 2 + az$, $y = 3 - 2a - z$, $z \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, para $a = 1, b = 1$ la solución es

$$x = 2 + z, \quad y = 1 - z, \quad z \in \mathbb{R}$$

Para $a = -1, b = 5$ la solución es

$$x = 2 - z, \quad y = 5 - z, \quad z \in \mathbb{R}$$

(2) *Considere el conjunto* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -x^2+1, y \leq -x^2+4, x > 0, y \geq 0\}$ *y la función*

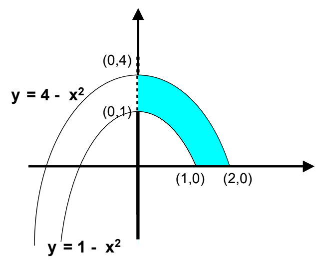
$$f(x,y) = x + \frac{y}{2}.$$

(a) *Dibuje el conjunto A, su frontera y su interior. Determine, justificando las respuestas, si el conjunto A es cerrado, abierto, acotado, compacto y/o convexo.*

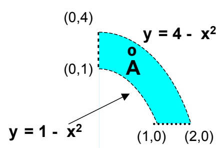
(b) *¿Se verifican las hipótesis del Teorema de Weierstrass para el conjunto A y la función f? Dibuje las curvas de nivel de f indicando la dirección de crecimiento. Utilice las curvas de nivel para determinar, si existe, un valor máximo y/o mínimo global de f en A, así como los puntos donde se alcanzan.*

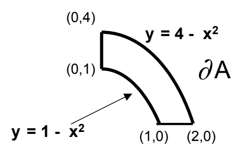
Solución:

(a) La represetación gráfica del conjunto A es la siguiente

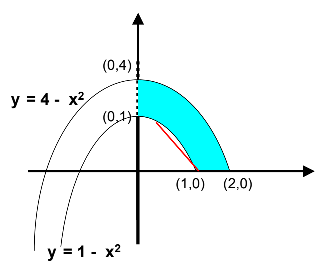


el interior y la frontera del conjunto A se pueden representar como



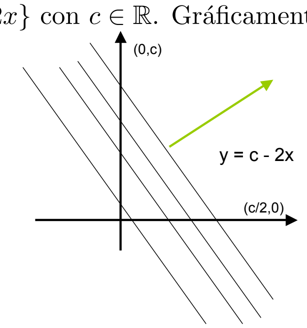


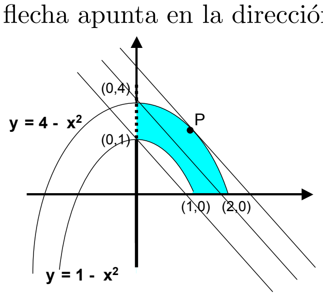
A no es ni abierto (ya que A no coincide su interior) ni cerrado (ya que A no contiene a su frontera). Es acotado, ya que está contenido en la bola de centro $(0,0)$ y radio 5. No es convexo ya que el segmento que une los puntos $(1,0)$ y $(1/2, 3/4)$ no está contenido en A.



El conjunto no es compacto, ya que no es cerrado.

(b) No se verifican las hipótesis del Teorema de Weierstrass ya que A no es compacto (Es acotado pero no cerrado). Las curvas de nivel de f son los conjuntos $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y/2 = c/2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = c - 2x\}$ con $c \in \mathbb{R}$. Gráficamente, (la flecha apunta en la dirección de crecimiento)





Vemos que el máximo se alcanza en el punto P en el que la recta $y = c - 2x$ es tangente a la gráfica de $y = 4 - x^2$. En este punto se verifica que $-2 = -2x$, es decir, $x = 1$. Y de la ecuación $y = 4 - x^2$, obtenemos que $P = (1,3)$. Por tanto, el valor máximo global de f en A es $f(1,3) = 1 + 3/2 = 5/2$. El valor mínimo de f en $\bar{A}$ (la clausura de A) se alcanza en el punto $(0,1) \notin A$. Gráficamente, vemos que $f(x,y) > f(0,1) = 1/2$ para todo $(x,y) \in A$. Como $(0,1) \in \partial(A) \setminus A$, la función f toma en A valores arbitrariamente cercanos al valor $f(0,1)$. Concluimos que no se alcanza un mínimo global en A.

(3) *Resuelva los dos apartados siguientes:*

(a) *Dada la funcion* $f(x,y) = y\ln xy - 3$, *calcule la ecuación del plano tangente a la gráfica de* f *correspondiente al punto* $(x,y) = (1/2, 2)$. *Calcule la derivada de* f *en el punto* $(1/2,2)$ *según el vector* $v = (-1,3)$

(b) *Dada la funcion* f *del apartado anterior, calcule la aproximación de Taylor de* f *de orden dos alrededor del punto* $(1/2,2)$.

Solución:

(a) El vector gradiente es

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{y}{x}, \ln xy + 1\right)$$

En el punto $(1/2,2)$ obtenemos

$$\nabla f(1/2,2) = (4,1)$$

Como $f(1/2,2) = -3$, la ecuación del plano tangente es $4(x-1/2)+(y-2) = z+3$. Es decir, $4x+y-z=7$. La derivada de f en el punto $(1/2,2)$ según el vector $v=(-1,3)$ es $\nabla f(1/2,2)\cdot v = (4,1)\cdot(-1,3) = -1$.

(b) El vector gradiente asociado a f

$$\nabla f(1/2) = (4,1)$$

La matriz Hessiana de f es

$$\mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} -y/x^2 & 1/x \\ 1/x & 1/y \end{pmatrix}$$

calculada en el punto $(1/2,2)$,

$$\mathrm{H}\, f(1/2,2) = \begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

La aproximación de Taylor de orden dos es

$$P_2(x,y) = -3 + 4(x-1/2) + (y-2) - 4(x-1/2)^2 + \frac{1}{4}(y-2)^2 + 2(x-1/2)(y-2)$$

(4) *Se considera la función* $f(x,y) = 8ax^3 - 24xy + y^3$*, donde* $a \neq 0$*.*

(a) *Halle los puntos críticos de la función anterior.*

(b) *Clasifique los puntos críticos encontrados en el apartado anterior, según los valores del parámetro* a*.*

Solución:

(a) En primer lugar, hallamos los puntos críticos de la función

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 24ax^2 - 24y = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -24x + 3y^2 = 0$$

Es decir, $y = ax^2$, $y^2 = 8x$. Las soluciones son $x = y = 0$ y $x = 2a^{-2/3}$, $y = 4a^{-1/3}$.

(b) Hallamos el hessiano de la función:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 48ax & -24 \\ -24 & 6y \end{pmatrix}$$

Sustituimos el hessiano de la función en los diferentes puntos críticos

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -24 \\ -24 & 0 \end{pmatrix}$$

Como el determinante es $D_2 = -24^2 < 0$, la forma cuadrática asociada es indefinida y $(0,0)$ es un punto de silla. Por otra parte,

$$Hf(2a^{-2/3}, 4a^{-1/3}) = \begin{pmatrix} 96a^{1/3} & -24 \\ -24 & 24a^{-1/3} \end{pmatrix} = 24 \begin{pmatrix} 4a^{1/3} & -1 \\ -1 & a^{-1/3} \end{pmatrix}$$

y tenemos que $D_1 = 96a^{1/3}$, $D_2 = 3 \times 24^2 = 1728 > 0$. Por lo tanto, si $a > 0$, el punto $(2a^{-2/3}, 4a^{-1/3})$ es un mínimo local y si $a < 0$ es un máximo local.

(5) *Considere la función*

$$f(x,y) = x^4 - y^4$$

y el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

(a) *Halle las ecuaciones de Lagrange que determinan los extremos de* f *en* A *y obtenga los puntos que satisfacen las citadas ecuaciones.*

(b) *Caracterice las soluciones del apartado anterior en máximos y mínimos locales, utilizando las condiciones de segundo orden. ¿Se puede afirmar que alguno de los máximos o mínimos es global? (Justifique la respuesta))*

Solución:

(a) La función de Lagrange en este caso es

$$L(x,y,\lambda) = x^4 - y^4 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

y las ecuaciones de Lagrange son

$$\begin{aligned} 4x^3 - 2\lambda x &= 0 \\ -4y^3 - 2\lambda y &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

que se simplifican a

$$x(2x^2 - \lambda) = 0 \tag{1}$$
$$y(2y^2 + \lambda) = 0 \tag{2}$$
$$x^2 + y^2 = 1 \tag{3}$$

Si $x = 0$, de la última ecuación obtenemos $y = \pm 1$. Luego $\lambda = -2y^2 = -2$. Por lo tanto, los puntos

$$x = 0, y = \pm 1; \quad \lambda = -2$$

son solución de las ecuaciones de Lagrange. Si $x \neq 0$, la primera ecuación implica $\lambda = 2x^2$. Sustituyendo este valor de λ en la segunda ecuación obtenemos que $0 = y(2y^2+\lambda) = y(2y^2+2x^2) = 2y$. En el último paso hemos usado la tercera ecuación. Por lo tanto $y = 0$ y obtenemos que los puntos

$$x = \pm 1, y = 0; \quad \lambda = 2$$

también son solución de las ecuaciones de Lagrange.

(b) La restricción es $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ y tenemos que $\nabla g(x,y) = 2(x,y)$. El Hessiano de L es

$$\mathrm{H}\, L(x,y;\lambda) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2\lambda & 0 \\ 0 & -12y^2 - 2\lambda \end{pmatrix}$$

y la forma cuadrática asociada a $\mathrm{H}\, L$ es

$$Q(v_1, v_2) = (12x^2 - 2\lambda)v_1^2 - (12y^2 + 2\lambda)v_2^2$$

En los puntos $x = 0$, $y = \pm 1$, $\lambda = -2$, el subespacio vectorial es $T = \{(v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2 : (0,y)\cdot(v_1,v_2) = 0\} = \{(v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2 : yv_2 = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : v_2 = 0\}$, ya que $y = \pm 1$. La forma cuadrática Q restringida a T es $Q^*(v_1) = 4v_1^2$, que es definida positiva. Concluimos entonces que los puntos $(0, \pm 1)$ corresponden a mínimos locales estrictos de f.

En los puntos $x = \pm 1$, $y = 0$, $\lambda = 2$, el subespacio vectorial es $T = \{(v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2 : \nabla g(x,0) \cdot (v_1,v_2) = 0\} = \{(v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2 : xv_1 = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : v_1 = 0\}$, ya que $x = \pm 1$. La forma cuadrática Q restringida a T es $Q^*(v_2) = -4v_2^2$, que es definida negativa. Concluimos entonces que los puntos $(\pm 1, 0)$ corresponden a máximos locales estrictos de f.

El conjunto A es compacto y la función f definida arriba es continua. Por el Teorema de Weierstrass, la función f alcanza un valor máximo y un valor mínimo en el conjunto A. Como se verifica la condición de regularidad, los puntos donde se alcanzan los valores extremos son solución de las ecuaciones de Lagrange resueltas en el apartado anterior. Como $f(0, \pm 1) = -1$, $f(\pm 1, 0) = 1$, los puntos $(0, \pm 1)$ corresponden al mínimo global de f en A. Y los puntos $(\pm 1, 0)$ corresponden al máximo global de f en A.