Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas II. Junio de 2009.

Apellidos:		**Nombre:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

IMPORTANTE

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **Sólo se entregará este cuadernillo.** Las respuestas deben escribirse en este cuadernillo ya que sólo se puntuará lo que haya en él. Por favor, compruebe que hay 10 páginas en el cuadernillo.
- **NO DESGRAPE LAS HOJAS DEL EXAMEN.**
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Lea las preguntas con cuidado. Cada apartado del examen vale 1 punto.
- Hay espacio adicional para operaciones al final del examen y detrás de esta página.

Problema	Puntuación
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

(1) *Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales*

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+(k+1)y+2z & = & -1 \\ kx+y+z & = & k \\ (k-1)\,x-2y-z & = & k+1 \end{array}\right.$$

donde $k \in \mathbb{R}$ es una constante.

(a) *Clasifique el sistema según los valores de k.*

(b) *Resuelva el sistema anterior para los valores de k para los cuales el sistema tenga infinitas soluciones. ¿Cuántos parámetros son necesarios para describir la solución?*

Solución:

(a) La matriz ampliada del sistema es

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k+1 & 2 & -1 \\ k & 1 & 1 & k \\ k-1 & -2 & -1 & k+1 \end{array}\right)$$

Haciendo operaciones elementales por filas obtenemos

$$(f_3 \mapsto -f_3+f_2)\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k+1 & 2 & -1 \\ k & 1 & 1 & k \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \quad (f_3 \mapsto -f_3+f_1)\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k+1 & 2 & -1 \\ k & 1 & 1 & k \\ 0 & k-2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Si $k=2$ entonces el sistema es equivalente al sistema asociado a la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

y vemos que $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|B) = 2$ por lo que el sistema es compatible indeterminado con un parámetro. Supongamos que $k \neq 2$. Dividiendo la tercera fila por $k-2$, el sistema es equivalente al sistema cuya matriz asociada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k+1 & 2 & -1 \\ k & 1 & 1 & k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k+1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 1 & k \end{array}\right) \begin{array}{c} {\scriptstyle (f_1 \mapsto f_1-(k+1)f_2)} \\ (f_3 \mapsto f_3-f_2) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 1 & k \end{array}\right)$$

$$(f_3 \mapsto f_3-kf_1)\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2k & 2k \end{array}\right)$$

Si $k \neq 1/2, k \neq 2$, entonces $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|B) = 3$ y el sistema es compatible determinado. Si $k = 1/2$ el sistema es equivalente a otro sistema cuya matriz asociada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

y como $\text{rango}(A) = 2, \text{rango}(A|B) = 3$ en este caso el sistema es incompatible.

(b) El sistema es compatible indeterminado si $k=2$. En este caso, el sistema original es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Eligiendo z como parámetro el conjunto se soluciones es

$$\left\{\left(\frac{7}{5}-\frac{z}{5}, -\frac{4}{5}-\frac{3z}{5}, z\right) : z \in \mathbb{R}\right\}$$

(2) *Considere la función* $f(x,y) = 3x\ln(x^2-y)$, *el punto* $p=(2,3)$ *y el vector* $v=(1,2)$.

(a) *Halle la derivada direccional de la función* f *en el punto* p *en la dirección del vector* v.

(b) *¿Cuál es la dirección de mayor crecimiento de* f *en el punto* p*? ¿Cuál es el máximo de la derivada direccional de* f *en el punto* p*?*

Solución:

(a) La función f es diferenciable en su dominio $\{(x,y \in \mathbb{R}^2 : x^2 > y\}$. Por lo tanto, podemos utilizar la fórmula

$$D_v f(p) = \nabla f(p) \cdot v$$

Como

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=2,y=3} &= 3\ln(x^2-y) + 3x\left.\frac{2x}{x^2-y}\right|_{x=2,y=3} = 24 \\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x=2,y=3} &= 3x\left.\frac{-1}{x^2-y}\right|_{x=2,y=3} = -6 \end{aligned}$$

Vemos que

$$\nabla f(2,3) = (24,-6), \quad \|\nabla f(2,3)\| = \|(24,-6)\| = \sqrt{24^2+6^2} = 6\sqrt{17}$$

por lo que la solución es

$$\frac{D_v f(p)}{\|v\|} = \frac{12}{\sqrt{5}}$$

(b) El valor máximo de la derivada direccional en el punto $(2,3)$ es

$$\|\nabla f(2,3)\| = \|(24,-6)\| = \sqrt{24^2+6^2} = 6\sqrt{17}$$

La dirección de mayor crecimiento de f en el punto $(2,3)$ es la determinada por $\nabla f(2,3) = (24,-6)$, es decir

$$\frac{\nabla f(2,3)}{\|\nabla f(2,3)\|} = \frac{1}{6\sqrt{17}}(24,-6) = \left(\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{-1}{\sqrt{17}}\right)$$

(3) *Considere la función* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{5xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) *Estudie si la función* f *es continua en el punto* $(0,0)$. *Estudie en qué puntos de* $\mathbb{R}^2$ *es continua la función* f.

(b) *Razone en cuáles de los siguientes conjuntos se puede aplicar el Teorema de Weierstrass para asegurar que la función* f *del apartado anterior alcanza extremos globales*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 4\}$$
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2 + y^2 \leq 1\}$$

Solución:

(a) Estudiamos primero el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Tomando el límite a través de rectas de la forma $y = mx$ vemos que

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{5mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{5m}{1+m^2}$$

Como este límite depende de m, el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe. La función f no es contina en el punto $(0,0)$. La función f es continua en el conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ya que es un cociente de polinomios y el denominador no se anula si $(x,y) \neq (0,0)$.

(b) El Teorema de Weierstrass no puede aplicarse en el conjunto A porque la función f no es continua en $(0,0)$ y $(0,0) \in A$. Tampoco puede aplicarse al conjunto B porque este conjunto no es acotado. El Teorema de Weierstrass puede aplicarse en el conjunto C ya que es compacto y f es continua en ese conjunto, porque $(0,0) \notin C$.

(4) *Una empresa fabrica y vende dos bienes A y B. El ingreso total procedente de la venta de x_1 unidades de A y x_2 unidades de B es el siguiente:*

$$I(x_1, x_2) = -x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_1 + 8x_2 \qquad (x_1 \text{ y } x_2 \text{ en miles de unidades})$$

(a) *Halle las cantidades x_1 y x_2 que maximizan el ingreso.*

(b) *Justifique que las cantidades obtenidas en el apartado anterior son un máximo global de la función $I(x_1, x_2)$*

Solución:

(a) Las derivadas parciales de f son

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x_1 - 2x_2 + 4$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x_1 - 6x_2 + 8$$

Los puntos críticos son las soluciones del sistema $\nabla f(x, y) = 0$, es decir,

$$-2x_1 - 2x_2 + 4 = 0$$
$$-2x_1 - 6x_2 + 8 = 0$$

La única solución de este sistema es $x_1 = x_2 = 1$.

(b) El Hessiano de f es

$$\mathrm{H}\, f(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$$

Como $D_1 = -2 < 0$ y $D_2 = 8 > 0$, $\mathrm{H}\, f(x, y)$ es definido negativo en todo $\mathbb{R}^2$. La función f es cóncava en todo $\mathbb{R}^2$ y todos los puntos críticos son máximos globales de f.

(5) *Considere el problema de maximización siguiente*

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & (x-1)^2 - y \\ \textbf{\textit{s.a.}} \quad & -2x + y \leq 2 \\ & x + y \leq 5 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

(a) *Halle las ecuaciones de Kuhn-Tucker que determinan los extremos de f y dibuje el conjunto factible*

(b) *Indique cuántas restricciones hay activas en el punto $A = (1,0)$. Compruebe si el punto $A = (1,0)$ satisface las ecuaciones de Khun-Tucker para el problema dado.*

Solución:

(a) El recinto del conjunto factible es el triángulo de vértices (1,4), (5,0) y (-1,0).
Transformamos la última restricción en $-y \leq 0$, y el Lagrangiano queda: $L(x,y) = (x-1)^2 - y + \lambda_1(2 - (-2x+y)) + \lambda_2(5 - (x+y)) + \lambda_3(0+y)$ de aquí obtenemos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x}(x,y) = 2x - 2 + 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ &\frac{\partial L}{\partial y}(x,y) = -1 - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ &\lambda_1(2 - (-2x+y)) = 0 \\ &\lambda_2(5 - (x+y)) = 0 \\ &\lambda_3(0+y) = 0 \\ &-2x + y \leq 2 \\ &x + y \leq 5 \\ &-y \leq 0 \\ &\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(b) Sustituyendo el punto en cada una de las tres restricciones obtenemos que si bien satisface las tres restricciones, sólo la tercera se convierte en una igualdad, por lo tanto sólo la tercera está activa.
Se trata ahora de ver si para el punto $(1,0)$ existen valores λ_1, λ_2 y λ_3 que hacen ciertas las ecuaciones obtenidas en el primer apartado. Hemos visto que la primera y segunda restricciones se satisfacen pero al no estar activas tenemos que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Sustituyendo los valores $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ y las coordenadas del punto $x = 1$ e $y = 0$ en la primera y segunda ecuación obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x}(x,y) = 2 \cdot 1 - 2 = 0 \\ &\frac{\partial L}{\partial y}(x,y) = -1 + \lambda_3 = 0 \end{aligned}\right\}$$

de donde $\lambda_3 = 1 \geq 0$. Por lo tanto el punto $(1,0)$ sí satisface las ecuaciones.