Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía
Examen final de Matemáticas II. 20 de Junio de 2007.

IMPORTANTE:

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h. 30min.**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **Sólo se entregará este cuadernillo.** Las respuestas deben escribirse en este cuadernillo ya que sólo se puntuará lo que haya en él. LAS DOS ÚLTIMAS PÁGINAS SE UTILIZARÁN PARA PAPEL EN SUCIO. LAS DOS ÚLTIMAS PÁGINAS NO SE CORREGIRÁN. NO DESGRAPAR LAS HOJAS DEL EXAMEN.
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Cada apartado del examen puntúa $0'5$ puntos.

Apellidos:		**Nombre:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

(1) Considerar el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x+3y+2z &= 1 \\ 3x+y+2z &= b \\ x+y+az &= 2b \end{aligned}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son un parámetros.

(a) Clasificar el sistema según los valores de a y b.
(b) Resolver el sistema anterior para los valores $a = 1$ y $b = 1/7$.

(a) Calculamos en primer lugar los rangos de la matriz del sistema y el de la ampliada, realizando operaciones elementales.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & b \\ 1 & 1 & a & 2b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & -4 & -3+b \\ 0 & -2 & -2+a & -1+2b \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2+a & -1+2b \\ 0 & -8 & -4 & -3+b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2+a & -1+2b \\ 0 & 0 & 4-4a & 1-7b \end{array}\right)$$

El rango de A es 2 si y sólo si $a = 1$. Cuando $a = 1$ el rango de la matriz ampliada es 3, si $b \neq 1/7$ y 2 si $b = 1/7$. En resumen, el sistema es

- Compatible determinado si $a \neq 1$.
- Compatible indeterminado si $a = 1$ y $b = 1/7$.
- Incompatible si $a = 1$ y $b \neq 1/7$.

(b) Sustituyendo $a = 1$ y $b = 1/7$, vemos que el sistema original es equivalente al siguiente sistema,

$$\begin{aligned} x+3y+2z &= 1 \\ -2y-z &= -5/7 \end{aligned}$$

Tomando y como parámetro, se obtiene $x = y - 3/7$, $z = 5/7 - 2y$ con $y \in \mathbb{R}$.

(2) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Halla el polinomio característico y los valores propios (o autovalores).
(b) Halla una base de vectores propios (o autovectores) de la matriz A.
(c) Calcula A^{10}. (Para facilitar los cálculos, utilizar que $2^{10} = 1024$.)

(a) El polinomio característico es $-(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$. Los valores propios son $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 2$

(b) Fácilmente se calcula

$$S(-1) = < (-1,1,0) >$$
$$S(1) = < (0,-1,1) >$$
$$S(2) = < (1,0,0) >$$

Por lo tanto, la forma diagonal, D y la matriz cambio de base, P, son

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Observamos que $A = PDP^{-1}$ por lo que

$$A^{10} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1024 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Como

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos que

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 1024 & 1023 & 1023 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,

$$f(x, y, z) = (2x - y + z, x - y, 3x - 2y + z, y + z)$$

(a) Hallar la matriz de f respecto de las bases canónicas.
(b) Calcular las dimensiones del núcleo y de la imagen y unas ecuaciones que definen estos subespacios.
(c) Hallar una base de la imagen de f y una base para el núcleo de f.

(a) La matriz, A, de la aplicación f, respecto de las bases canónicas es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Calculamos la forma reducida,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & x \\ 1 & -1 & 0 & y \\ 3 & -2 & 1 & z \\ 0 & 1 & 1 & t \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 1 & t \\ 3 & -2 & 1 & z \\ 2 & -1 & 1 & x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 1 & t \\ 0 & 1 & 1 & -3y + z \\ 0 & 1 & 1 & x - 2y \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & -t - 3y + z \\ 0 & 0 & 0 & x + y - z \end{pmatrix}$$

de donde deducimos que $\dim \operatorname{Im}(f) = \operatorname{rango}(A) = 2$. Además un sistema de ecuaciones que definen a $\operatorname{Im}(f)$ es

$$\begin{aligned} -3y - t + z &= 0 \\ x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

De la fórmula

$$3 = \dim(\operatorname{Im}(f)) + \dim(\ker(f))$$

obtenemos ahora que $\dim(\ker(f)) = 1$ y un sistema lineal de ecuaciones para determinar $\ker(f)$ es

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned}$$

(c) Una base de $\operatorname{Im}(f)$, obtenida a a partir de las columnas de A, es $\{(2, 1, 3, 0), (1, 0, 1, 1)\}$. Ahora calculamos una base de $\ker(f)$. Para ello resolvemos el sistema anterior,

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned}$$

Como sabemos que hay un parámetro, elegimos y como el parámetro. Las variables dependientes son x y z, que verifican la relación $x = y$, $z = -y$. Entonces,

$$\ker(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^4 : x = y, z = -y\} = \{(y, y, -y) : y \in \mathbb{R}\}$$

y una base de $\ker(f)$ es $\{(1, 1, -1)\}$.

(4) Dado el conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x - 2y \geq -6, \quad x \leq 0, \quad y \geq 0\}$$

(a) Dibuja el conjunto A, calculando los puntos de corte con los ejes. Dibuja su frontera y su interior y discute si A es un conjunto abierto, cerrado, acotado, compacto y/o convexo, razonando tus respuestas.

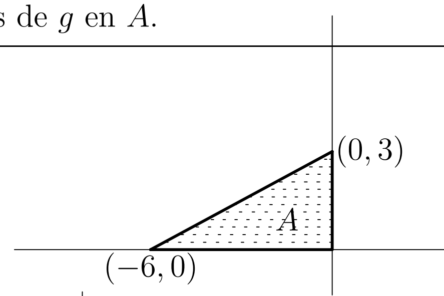
(b) Demuestra que la función

$$f(x,y) = \frac{x^2}{(x+4)^2 + (y-2)^2}$$

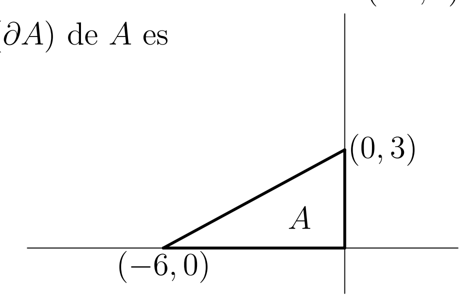
tiene máximo y mínimo sobre A.

(c) Dibuja las curvas de nivel de la función $g(x,y) = y + x^2$ y utilízalas para determinar dónde están los máximos y mínimos de g en A.

(a) El conjunto A es



(b) La frontera (∂A) de A es

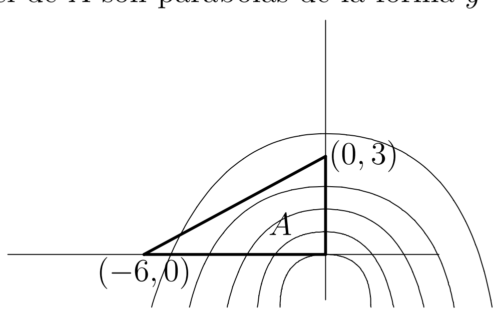


el interior de A es $A \setminus \partial A$, y la clausura de A es $\bar{A} = A \cup \partial A = A$ (ya que $\partial A \subset A$). Por lo tanto, A es cerrado, no es abierto (porque $\partial A \cap A \neq \emptyset$), es compacto (cerrado y acotado). Finalmente, el conjunto A es convexo.

Otra forma de probar que A es cerrado y convexo es el siguiente razonamiento: Las funciones $h_1(x,y) = x - 2y + 6$, $h_2(x,y) = x$ y $h_3(x,y) = y$ son continuas y lineales. Por tanto el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : h_1(x,y) \geq 0, h_2(x,y) \leq 0, \quad h_3(x,y) \geq 0\}$ es cerrado y convexo.

(b) La función f es continua excepto en el punto $(-4,2) \notin A$. Por tanto, f es continua en A, que es compacto. Por el Teorema de Weierstrass, la función alcanza un máximo y un mínimo en el conjunto A.

(c) Las curvas de nivel de A son parábolas de la forma $y = C - x^2$ con $C \in \mathbb{R}$.



Gráficamente, vemos que el mínimo se alcanza en el punto $(0,0)$ y el máximo en el punto $(-6,0)$.

(5) Considerar la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2+x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

(a) Estudiar si la función f es continua en el punto $(0,0)$. Estudiar en qué puntos de $\mathbb{R}^2$ es continua la función f.
(b) Calcular las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$.
(c) ¿En qué puntos de $\mathbb{R}^2$ es diferenciable la función f?

(a) Estudiamos el límite cuando $(x,y)\to(0,0)$ a través de la recta $x(t)=t$, $y(t)=kt$ con $k\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{t\to 0} f(t,kt)=\lim_{t\to 0}\frac{t^2(1+kt)}{t^2+k^2t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{(1+kt)}{1+k^2}=\frac{1}{1+k^2}$$

y como depende del parámetro $k\in\mathbb{R}$, el límite no existe y la función no es continua.

(b) Las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$ son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}$$

Observamos que para todo $t\neq 0$,

$$f(t,0)=\frac{t^2}{t^2}=1$$
$$f(0,t)=0$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\quad\text{no existe}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{0}{t}=0$$

(c) Para $(x,y)\neq(0,0)$, la función $f(x,y)$ está definida como un cociente de polinomios y el denominador no se anula. Por tanto, para $(x,y)\neq(0,0)$, todas las derivada parciales existen y son continuas. Deducimos que la función es diferenciable en todos los puntos $(x,y)\neq(0,0)$.

En el punto $(0,0)$ la función no es continua y, por tanto, no es diferenciable. (Otra forma de probarlo sería observando que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

no existe.)

(6) Considera la función
$$f(x,y) = 2x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2$$
(a) Obtener los puntos críticos de f.
(b) Clasificar los puntos críticos de f obtenidos en el apartado anterior.

(c) Determinar el mayor subconjunto abierto A de $\mathbb{R}^2$ donde la función f es cóncava.
(d) Calcular los extremos globales de f en A.

(a) Las derivadas parciales de la función son
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x^3 - 4x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4y$$
y, teniendo en cuenta que la función es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$, los puntos críticos son solución del sistema,
$$8x^3 - 4x = 0$$
$$4y^3 - 4y = 0$$
Las soluciones de la primera ecuación son
$$x = 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}$$
mientras que las soluciones de la segunda ecuación son
$$y = 0, 1, -1$$
De donde se obtienen 9 puntos críticos:
$$(0,0), (0,\pm 1), (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm 1),$$
(b) La matriz Hessiana de f es
$$\mathrm{H}\, f(x,y = \begin{pmatrix} 24x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$
cuyos valores propios son $\lambda_1 = 24x^2 - 4$ y $\lambda_2 = 12y^2 - 4$ Un razonamiento sencillo demuestra ahora que
$$\mathrm{H}\, f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{H}\, f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm 1) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$
$$\mathrm{H}\, f(0,\pm 1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{H}\, f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$
por lo que
$$(0,0) \qquad \text{es un máximo local}$$
los cuatro puntos
$$(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm 1) \qquad \text{son mínimos locales}$$
y los cuatro puntos
$$(0,\pm 1), \quad (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \qquad \text{son puntos de silla}$$

(c) f es de clase $C^2(\mathbb{R}^2)$, luego f es cóncava si y solo si $\mathrm{H}\,f(x,y)$ es definida negativa o semidefinida negativa. Ello implica que $24x^2 - 4 \leq 0$ y $12y^2 - 4 \leq 0$. De aquí se obtiene que

$$x^2 \leq \frac{1}{6} \quad \text{e} \quad y^2 \leq \frac{1}{3}$$

es decir,

$$-\frac{1}{\sqrt{6}} < x < \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \text{e} \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} < y < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Así pues, el mayor abierto donde f es cóncava es

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{\sqrt{6}} < x < \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} < y < \frac{1}{\sqrt{3}}\}$$

(d) El conjunto A es convexo. En ese conjunto A, el Hessiano, $\mathrm{H}\,f(x,y)$, es definido negativo luego f es estrictamente cóncava en A y su único punto crítico en ese conjunto, $(0,0)$ es el máximo global en A.

Estudiamos ahora si existe un mínimo global en el conjunto A. Como el conjunto A es abierto, si existiera un mínimo de f en A, sería un punto crítico de f. Pero como f es cóncava, todos los puntos críticos de f son máximos globales. Por tanto, f no tiene ningún mínimo (local o global) en A.

(7) Considerar la función

$$f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - x - z + 4z^2$$

y el conjunto

$$A = \{(x,y,z) : x + y = z\}$$

(a) Hallar las ecuaciones de Lagrange que determinan los extremos de f en A.

(b) Determinar los puntos que satisfacen las ecuaciones de Lagrange y hallar los extremos de f en A, especificando si son máximos o mínimos locales.

(a) El Lagrangiano es

$$L(x,y,z,\lambda) = 2x^2 + y^2 - x - z + 4z^2 + \lambda(x + y - z).$$

Las ecuaciones de Lagrange son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 4x - 1 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2y + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= -1 + 8z - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x + y - z = 0 \end{aligned}$$

(b) De las primeras ecuaciones, obtenemos: $4x - 1 = 2y = 1 - 8z$. Haciendo la substitución en la última ecuación, obtenemos

$$x = \frac{3}{14}, \quad y = -\frac{1}{14}, \quad z = \frac{1}{7}, \quad \lambda = \frac{1}{7}.$$

De ahí, tenemos que el único punto que cumple las condiciones de Lagrange es $\left(\frac{3}{14}, -\frac{1}{14}, \frac{1}{7}\right)$. La matriz Hessiana de la función L es

$$HL(x,y,z) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

que es definida positiva. Luego, $\left(\frac{3}{14}, -\frac{1}{14}, \frac{1}{7}\right)$ es un mínimo. Como el Lagrangiano no tiene más puntos críticos, no hay ningún máximo.