Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas II. 26 de Junio de 2006.

IMPORTANTE:

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h. 30min.**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **Sólo se entregará este cuadernillo.** No entregar el papel en sucio. Las respuestas deben escribirse en este cuadernillo ya que sólo se puntuará lo que haya en él.
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Cada apartado del examen puntúa $0'5$ puntos.

Apellidos:		**Nombre:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

(1) Considerar el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} ax+y+z &= 1 \\ x+ay+z &= 0 \\ x+y+az &= -1 \end{aligned}$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

(a) Clasificar el sistema según los valores de a.

(b) Resolver el sistema anterior para los valores de a para los que el sistema es compatible indeterminado.

---

(2) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \beta \\ 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ son parámetros,

(a) Halla el polinomio característico y los autovalores.

(b) Determina para qué valores de los parámetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la matriz es diagonalizable.

(c) Para los valores de los parámetros $\alpha = -1$ y $\beta = -8$, halla la matriz diagonal correspondiente y la matriz de cambio de base.

---

(3) Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x,y,z,t) = (-x-y-z, x-y-t, -3x-3y-3z)$$

(a) Calcular las dimensiones del núcleo y de la imagen y unas ecuaciones para estos subespacios.

(b) Hallar una base de la imagen de f y una base para el núcleo de f.

---

(4) Dado el conjunto

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tales que } x \le 1, y \ge 0, y \le x^3\}$$

(a) Dibuja el conjunto S, su frontera y su interior y discute si S es un conjunto abierto, cerrado, acotado, compacto y/o convexo, razonando tus respuestas.

(b) Demuestra que la función $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2$ tiene máximo y mínimo sobre S.

(c) Dibuja las curvas de nivel de $f(x,y)$ y determina donde están los máximos y mínimos de f en S.

---

(5) Considerar la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Estudiar si la función f es continua en el punto $(0,0)$.

(b) Calcular las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$.

(c) Determinar en qué puntos de $\mathbb{R}^2$ son continuas las derivadas parciales de f.

---

(6) Considera la función

$$f(x,y,z) = x^2 + ay^2 + z^2 + 2axy + 2xz - 2yz$$

(a) Hallar la matriz Hessiana de f.

(b) Estudiar para qué valores del parámetro a, la función f es estrictamente cóncava o estrictamente convexa.

---

(7) Considera la función $f(x, y) = 8x^3 + 2xy - 3x^2 + y^2 + 1$. Se pide,

(a) Obtener los puntos críticos de f.

(b) Clasificar los puntos críticos de f, obtenidos en el apartado anterior.

(c) Determinar si f tiene extremos absolutos en el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4} < x\}$$

Sugerencia: Estudiar la concavidad o convexidad de f en el conjunto A.

---

(8) Considerar la función

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + 2x^2$$

y el conjunto

$$A = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 = 3\right\}$$

(a) Hallar las ecuaciones de Lagrange que determinan los extremos de f en A.

(b) Determinar los puntos que satisfacen las ecuaciones de Lagrange y hallar los extremos de f en A, especificando si son máximos o mínimos.
