Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía
Examen final de Matemáticas II. 26 de Junio de 2006.

IMPORTANTE:

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h. 30min.**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **Sólo se entregará este cuadernillo.** No entregar el papel en sucio. Las respuestas deben escribirse en este cuadernillo ya que sólo se puntuará lo que haya en él.
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Cada apartado del examen puntúa $0'5$ puntos.

Apellidos:		**Nombre:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

(1) Considerar el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} ax + y + z =& 1 \\ x + ay + z =& 0 \\ x + y + az =& -1 \end{aligned}$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

(a) Clasificar el sistema según los valores de a.

(b) Resolver el sistema anterior para los valores de a para los que el sistema es compatible indeterminado.

(a) Calculamos en primer lugar los rangos de la matriz del sistema y el de la ampliada, realizando operaciones elementales.

$$\begin{aligned} (A|B) = & \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & -1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \\ \sim & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & a-1 & -1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 1 \end{array}\right) \\ \sim & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & a-1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-a-(a^2-1) & 1+(a+1) \end{array}\right). \end{aligned}$$

El rango de A es 2 si y sólo si $-a^2 - a + 2 = 0$, es decir, cuando $a = 1$ o $a = -2$. Por tanto, el sistema es compatible determinado si $a \neq 1, -2$. Cuando $a = 1$ el rango de la matriz ampliada es 3, luego el sistema es incompatible. Si $a = -2$, entonces el rango de la matriz ampliada es 2, por lo que el sistema es compatible indeterminado.

(b) Se pide solucionar el sistema para $a = -2$. Sustituyendo este valor en el sistema triangular, vemos que el sistema original es equivalente al siguiente sistema,

$$\begin{aligned} x - 2y + z =& 0 \\ 3x - 3z =& 1 \end{aligned}$$

Fácilmente, se obtiene $x = z - 2/3$, $y = z - 1/3$ y z libre.

(2) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \beta \\ 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ son parámetros,

(a) Halla el polinomio característico y los autovalores.

(b) Determina para qué valores de los parámetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la matriz es diagonalizable.

(c) Para los valores de los parámetros $\alpha = -1$ y $\beta = -8$, halla la matriz diagonal correspondiente y la matriz de cambio de base.

(a) El polinomio característico es (desarrollando por la última fila)

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & \beta \\ 2 & -1-\lambda & -4 \\ 0 & 0 & \alpha-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda)(\alpha-\lambda)$$

por lo que los autovalores son $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = \alpha$.

(b) Si $\boxed{\alpha \neq -1, 3}$ entonces la matriz es diagonalizable.

Si $\boxed{\alpha = 3}$ los autovalores son $\lambda_1 = 3$, con multiplicidad 2 y $\lambda_2 = -1$ con multiplicidad 1. Calculamos el espacio de vectores propios asociados al autovalor $\lambda_1 = 3$. Este espacio es el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo siguiente

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 2 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y para que este subespacio tenga dimensión 2 debe verificarse que $\beta = 0$ Es decir, si $\alpha = 3$, entonces la matriz es diagonalizable si y sólo si $\underline{\beta = 0}$.

Si $\boxed{\alpha = -1}$ los autovalores son $\lambda_1 = -1$, con multiplicidad 2 y $\lambda_2 = 3$ con multiplicidad 1. Calculamos el espacio de vectores propios asociados al autovalor $\lambda_1 = -1$. Este espacio es el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo siguiente

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & \beta \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Este subespacio tiene dimensión 2 si y sólo si $\underline{\beta = -8}$. Por lo tanto, si $\alpha = -1$, la matriz es diagonalizable si y sólo si $\beta = -8$.

(c) Para los valores de los parámetros $\alpha = -1$ y $\beta = -8$, los subespacios de vectores propios son

$$S(-1) = \{(x, y, z \in \mathbb{R}^3 : x - 2z = 0\} =< (2, 0, 1), (0, 1, 0) >$$

$$S(3) = \{(x, y, z \in \mathbb{R}^3 : x = 2y, z = 0\} =< (2, 1, 0) >$$

Por lo tanto, la forma diagonal, D y la matriz cambio de base, P, son

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x, y, z, t) = (-x - y - z, x - y - t, -3x - 3y - 3z)$$

(a) Calcular las dimensiones del núcleo y de la imagen y unas ecuaciones para estos subespacios.
(b) Hallar una base de la imagen de f y una base para el núcleo de f.

(a) La matriz, A, de la aplicación f, respecto de las bases canónicas es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -3 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la forma reducida,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 & x \\ 1 & -1 & 0 & -1 & y \\ -3 & -3 & -3 & 0 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 & x \\ 0 & -2 & -1 & -1 & x+y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z-3x \end{array}\right)$$

de donde deducimos que $\dim \mathrm{Im}(f) = \mathrm{rango}(A) = 2$. Además una ecuación que define a $\mathrm{Im}(f)$ es

$$z = 3x$$

De la fórmula

$$4 = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\ker(f))$$

obtenemos ahora que $\dim(\ker(f)) = 2$ y un sistema lineal de ecuaciones para determinar $\ker(f)$ es

$$\begin{aligned} -x - y - z &= 0 \\ x - y - t &= 0 \end{aligned}$$

(b) Una base de $\mathrm{Im}(f)$, obtenida a a partir de las columnas de A, es $\{(1,0,3),(0,1,0)\}$. Ahora calculamos una base de $\ker(f)$. Para ello resolvemos el sistema anterior,

$$\begin{aligned} -x - y - z &= 0 \\ x - y - t &= 0 \end{aligned}$$

Como sabemos que hay dos parámetros, elegimos x e y como los parámetros. Las variables dependientes son z y t, que verifican la relación

$$\begin{aligned} z &= -x - y \\ t &= x - y \end{aligned}$$

Entonces,

$$\ker(f) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : z = -x - y, t = x - y\} = \{(x, y, -x - y, x - y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

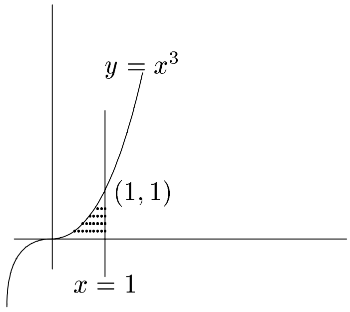
y una base de $\ker(f)$ es $\{(1, 0, -1, 1), (0, 1, -1, -1)\}$.

(4) Dado el conjunto

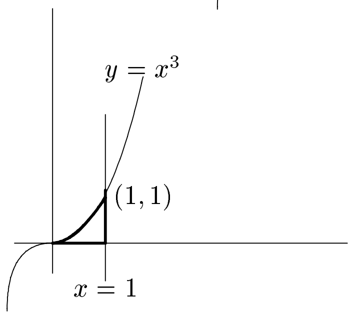
$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tales que } x \leq 1, y \geq 0, y \leq x^3\}$$

(a) Dibuja el conjunto S, su frontera y su interior y discute si S es un conjunto abierto, cerrado, acotado, compacto y/o convexo, razonando tus respuestas.
(b) Demuestra que la función $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2$ tiene máximo y mínimo sobre S.
(c) Dibuja las curvas de nivel de $f(x,y)$ y determina donde están los máximos y mínimos de f en S.

(a) El conjunto S es



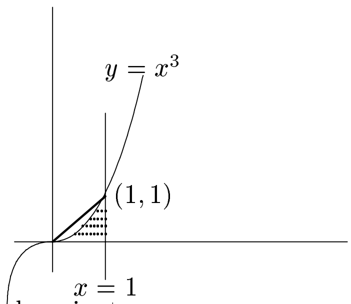
(b) La frontera (∂S) de S es



el interior de S es $S \setminus \partial S$, y la clausura de S es

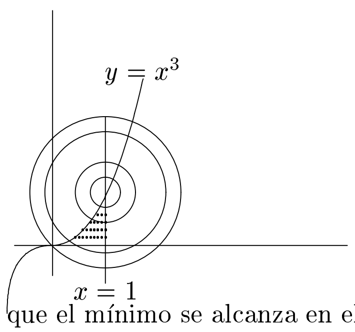
$$\bar{S} = S \cup \partial S = S$$

(ya que $\partial S \subset S$). Por lo tanto, S es cerrado, no es abierto (porque $\partial S \cap S \neq \emptyset$), es compacto (cerrado y acotado). Finalmente, el conjunto S no es convexo ya que el segmento que une los puntos $(0,0) \in S$ y $(1,1) \in S$



no está contenido en el conjunto.

(b) La función es continua y el conjunto es compacto. Por el Teorema de Weierstrass, la función alcanza un máximo y un mínimo en el conjunto S.
(c) Las curvas de nivel de S son círculos centrados en el punto $(1,1)$.



Gráficamente, vemos que el mínimo se alcanza en el punto $(1,1)$ y el máximo en el punto $(0,0)$.

(5) Considerar la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Estudiar si la función f es continua en el punto $(0,0)$.
(b) Calcular las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$.
(c) Determinar en qué puntos de $\mathbb{R}^2$ son continuas las derivadas parciales de f.

(a) Estudiamos el límite cuando $(x,y) \to (0,0)$ a través de la curva $x(t) = t$, $y(t) = kt$ con $k \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t\to 0} f(t,kt) = \lim_{t\to 0} \frac{3k^2t^4}{t^4 + k^4t^4} = \frac{3k^2}{1+k^4}$$

y como depende del parámetro $k \in \mathbb{R}$, el límite no existe y la función no es continua.

(b) Las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$ son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t}$$

Observamos que

$$f(t,0) = f(0,t) = 0 = f(0,0)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto

$$\frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0$$

para todo $t \neq 0$ y concluimos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

(c) Para $(x,y) \neq (0,0)$, la función $f(x,y)$ está definida como un cociente de polinomios y el denominador no se anula. Por tanto, para $(x,y) \neq (0,0)$, todas las derivada parciales existen y son continuas.
Si las derivadas parciales de f fueran continuas en $(0,0)$, entonces, la función sería diferenciable en ese punto y por tanto, sería continua en el punto $(0,0)$. Como esto contradice lo que hemos encontrado en el apartado (a), las derivadas parciales de f no son continuas en $(0,0)$.
En resumen, las derivadas parciales de f existen y son continuas en todos los puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ excepto en el punto $(0,0)$.

(6) Considera la función

$$f(x,y,z) = x^2 + ay^2 + z^2 + 2axy + 2xz - 2yz$$

(a) Hallar la matriz Hessiana de f.

(b) Estudiar para qué valores del parámetro a, la función f es estrictamente cóncava o estrictamente convexa.

(a) Las derivadas parciales de la función son

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2ay + 2z$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2ay + 2ax - 2z$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z + 2x - 2y$$

por lo que la matriz Hessiana de f es

$$\mathrm{H}\, f = \begin{pmatrix} 2 & 2a & 2 \\ 2a & 2a & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & a & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Es suficiente clasificar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & a & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $D_1 = 1$, la matriz no puede ser definida negativa, por lo que la función no puede ser estrictamente cóncava. Estudiamos ahora en qué puntos la función es estrictamente convexa. Como

$$D_2 = a - a^2 = a(1-a)$$
$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & a & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & a & -1 \\ 0 & -a-1 & 0 \end{vmatrix} = (a+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & -1 \end{vmatrix} = (a+1)(-1-a) = -(a+1)^2$$

Vemos que $D_3 \leq 0$ por lo que la forma cuadrática asociada a A no puede ser definida positiva. La función tampoco puede ser convexa.

(7) Considera la función $f(x,y) = 8x^3 + 2xy - 3x^2 + y^2 + 1$. Se pide,

(a) Obtener los puntos críticos de f.

(b) Clasificar los puntos críticos de f, obtenidos en el apartado anterior.

(c) Determinar si f tiene extremos absolutos en el conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4} < x\}$$

Sugerencia: Estudiar la concavidad o convexidad de f en el conjunto A.

(a) Los puntos críticos (x,y) de f verifican el sistema de ecuaciones

$$\frac{f\partial}{\partial x} = 24x^2 + 2y - 6x = 0$$
$$\frac{f\partial}{\partial y} = 2x + 2y = 0$$

De la segunda ecuación obtenemos que $x = -y$. Sustituyendo en la primera ecuación, obtenemos además que

$$24x^2 - 8x = 8x(3x-1) = 0$$

Esta ecuación tiene dos soluciones, $x = 0$ y $x = 1/3$. Luego obtenemos dos puntos críticos,

$$(0,0), \quad (1/3, -1/3)$$

(b) La matriz Hessiana de f es

$$\mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 48x - 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

y obtenemos los menores principales,

$$D_1(x,y) = 48x - 6;$$
$$D_2(x,y) = 2(48x-6) - 4 = 96x - 16$$

En el punto $(0,0)$, tenemos que

$$D_1 = -6 < 0, \quad D_2 = -16 < 0$$

por lo que $(0,0)$ es un punto de silla, ya que $\mathrm{H}\, f(0,0)$ es indefinida.
En el punto $(1/3, -1/3)$, tenemos que

$$D_1 = 10 > 0, \quad D_2 = 16 > 0$$

por lo que $(1/3, -1/3)$ es un mínimo local, ya que $\mathrm{H}\, f(1/3, -1/3)$ es definida positiva.

(c) En el conjunto A se verifica que

$$x > \frac{1}{4}$$

por lo que

$$D_1 = 48x - 6 > 6, \qquad D_2 = 96x - 16 > 8$$

es decir, $\mathrm{H}\, f(x,y)$ es definida positiva en el conjunto A.

Por otra parte, como el conjunto A es abierto, los extremos de f en A coinciden con los puntos críticos de f. Asimismo, como el conjunto A es convexo y f es convexa en A los puntos críticos de f son automáticamente mínimos absolutos de f en A. Concluimos que el punto $(1/3, -1/3)$ es el único punto extremo de f sobre A y es un mínimo absoluto.

(8) Considerar la función

$$f(x,y)=\frac{x^3}{3}+\frac{y^3}{3}+2x^2$$

y el conjunto

$$A=\{(x,y):x^2+y^2=3\}$$

(a) Hallar las ecuaciones de Lagrange que determinan los extremos de f en A.
(b) Determinar los puntos que satisfacen las ecuaciones de Lagrange y hallar los extremos de f en A, especificando si son máximos o mínimos.

(a) El lagrangiano es

$$L(x,y)=\frac{x^3}{3}+\frac{y^3}{3}+2x^2+\lambda\left(x^2+y^2-3\right).$$

Derivando obtenemos las ecuaciones de Lagrange,

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} &= x^2+4x+2\lambda x=0\\ \frac{\partial L}{\partial y} &= y^2+2\lambda y=0\\ & x^2+y^2=3\end{aligned}$$

(b) El sistema es equivalente a

$$\begin{aligned}x(x+4+2\lambda)&=0\\ y(y+2\lambda)&=0\\ x^2+y^2&=3\end{aligned}$$

Si $x=0$, entonces $y=\pm\sqrt{3}$. Y obtenemos los puntos críticos $(0,\sqrt{3})$ y $(0,-\sqrt{3})$. Análogamente, haciendo $y=0$, obtenemos los puntos $(\sqrt{3},0)$ y $(-\sqrt{3},0)$.
Si $x=-4-2\lambda$ e $y=-2\lambda$, entonces

$$y^2=4-x^2=4-(16+4\lambda^2-16\lambda)=-4\lambda^2+16\lambda-12=4\lambda^2$$

Realizando operaciones, esta expresión es equivalente a que

$$2\lambda^2-4\lambda+3=0$$

y la ecuación anterior no tiene solución real. Por lo tanto, los únicos puntos críticos son $(0,\sqrt{3})$, $(0,-\sqrt{3})$, $(\sqrt{3},0)$ y $(-\sqrt{3},0)$.
El conjunto A es compacto y la función f es continua. Por el Teorema de Weierstrass, la función alcanza un máximo y un mínimo en A. Calculamos los valores de f en los puntos críticos,

$$\begin{aligned}f\left(0,-\sqrt{3}\right)&=-\sqrt{3};\\ f\left(0,\sqrt{3}\right)&=\sqrt{3};\\ f\left(-\sqrt{3},0\right)&=-\sqrt{3}+6;\\ f\left(\sqrt{3},0\right)&=\sqrt{3}+6;\end{aligned}$$

El punto de mínimo de f en A es $\left(0,-\sqrt{3}\right)$ y el punto de máximo es $\left(\sqrt{3},0\right)$.