Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía
Examen final de Matemáticas II. Junio de 2004.

IMPORTANTE:

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h. 30min.**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **Sólo se entregará este cuadernillo.** No entregar el papel en sucio. Las respuestas deben escribirse en este cuadernillo ya que sólo se puntuará lo que haya en él.
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Cada apartado del examen puntúa $0'5$ puntos.

Apellidos:		**Nombre:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

(1) Considerar el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} ax + 2z &= 2 \\ 3x + 2y &= 1 \\ x - 2y + bz &= 3 \end{aligned}$$

donde a y b son parámetros.
(a) Clasificar el sistema según los valores de los parámetros a y b.
(b) Resolver el sistema anterior para los valores de los parámetros a y b en que es compatible indeterminado.

---

(2) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

donde a y b son parámetros reales.
(a) Determinar para qué valores de a y b la matriz es diagonalizable.
(b) Para los valores de a y b que hacen que la matriz A sea diagonalizable, calcular su forma diagonal y la matriz de paso.

---

(3) Dada la forma cuadrática $Q(x, y, z) = x^2 + ay^2 + z^2 - 2axy + 2xz - 2yz$,
(a) Determinar para qué valores de $a \neq 1$, la forma cuadrática es definida positiva, definida negativa o indefinida.
(b) Clasificar la forma cuadrática para $a = 1$. Sugerencia: Calcular los valores propios de la matriz asociada.

---

(4) Sea $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por

$$f(x, y, z, t) = (x + 2y + t, -5x - 9y - 4z, -8x - 14y - 8z + 2t)$$

(a) Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$. Calcular las dimensiones del núcleo ($N(f)$) y de la Imagen ($\mathrm{Im}(f)$).
(b) Expresar $\mathrm{Im}(f)$ como el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales independientes.

---

(5) Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq a^2, y^2 \leq a^2\}$, con $a > 0$ y $f(x, y) = e^{x^2+y}$.
(a) Dibujar el conjunto A, su frontera y su interior. ¿Es A acotado?
(b) Dibujar las curvas de nivel de f. Sugerencia: considera las curvas de nivel

$$C_{e^k} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = e^k\}$$

(c) Enunciar el Teorema de Weierstrass. Hallar el máximo y el mínimo de f en A. Sugerencia: Compara las curvas de nivel anteriores C_{e^k} y $C_{e^{k'}}$ para valores $k < k'$.

---

(6) (a) Escribe la definición de función continua en un punto. Escribe la definición de función diferenciable en un punto.
(b) ¿Es continua la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^4} & \text{Si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{Si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

en el punto $(0, 0)$?

(c) Halla las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$. ¿Es diferenciable f en $(0,0)$?

---

(7) Dada al función $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - 4\ln(xy)$,

(a) Determina el dominio de f.

(b) Obtén los puntos críticos de f y clasifícalos.

(c) Determina razonadamente si f alcanza el máximo ó mínimo global (o absoluto) en el conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0,\, y > 0\}$, indicando en caso afirmativo en qué punto (o puntos) lo hace.

---

(8) Considerar la función $f(x,y) = x^3 + y^3 + 2x^2 + 2y^2$ y el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

(a) Hallar las ecuaciones de Lagrange que determinan los extremos de f en A y determinar los puntos que las satisfacen.

(b) Hallar el máximo y el mínimo de f en A.

(c) Hallar el máximo y el mínimo de f en en el conjunto $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
