Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía
Examen final de Matemáticas II. Junio de 2003.

Modelo 1

Apellidos: **Nombre:**

DNI: **Titulación:** **Grupo:**

(1) Dado el sistema de ecuaciones, $\boxed{\text{1 punto}}$

$$\left.\begin{array}{c} x + az = b \\ ax + 2y + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{array}\right\}$$

(a) Discute para qué valores de a y b el sistema es compatible (determinado y/o indeterminado).
(b) Resuelve el sistema en el caso en que $a = 1$, $b = 1$.

(a) La matriz asociada al sistema es $A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & b \\ a & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$. Observemos en primer lugar que

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1$, de manera que si $a \neq \pm 1$, el rango de A es 3.

Puesto que el rango de la matriz ampliada asociada al sistema $A|B$ verifica rango$(A) \leq$ rango $(A|B) \leq 3$, deducimos que si $a \neq \pm 1$, rango$(A|B) = 3$.

$\boxed{\textit{Caso } a = 1:}$

En este caso, $A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$. El menor de orden dos $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene determinante no nulo, luego rango$(A) = 2 \leq$ rango$(A|B)$.

Para determinar el rango de $A|B$, puesto que cualquier menor de orden 3×3 que contenga a las columnas primera y tercera tendrá rango menor o igual que 2, basta calcular el determinante del menor $\begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, cuyo valor es $1 - b$.

Con estos resultados, obtenemos que si $b = 1$, rango $(A|B) = 2$ y si $b \neq 1$, rango $(A|B) = 3$.

$\boxed{\textit{Caso } a = \textit{-1}:}$

De manera similar al caso $a = 1$, obtenemos $A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$. De nuevo, tomando, por ejemplo, el menor de orden dos $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, que tiene determinante no nulo, obtenemos rango$(A) = 2 \leq$rango$(A|B)$.

Calculemos el rango de $A|B$. Basta, de nuevo, calcular el determinante del menor $\begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, cuyo valor es $1 - 3b$.

Con estos resultados, obtenemos que si $b = \frac{1}{3}$, rango$(A|B) = 2$ y si $b \neq \frac{1}{3}$, rango$(A|B) = 3$. Así, por el Teorema de Rouché-Frobenius, nuestro sistema será:

COMPATIBLE DETERMINADO.- Si $a \neq \pm 1$.
COMPATIBLE INDETERMINADO.- Si $\{a = 1 \ , \ b = 1\}$ o si $\{a = -1 \ , \ b = \frac{1}{3}\}$.
INCOMPATIBLE.- en los demás casos: $\{a = 1 \ , \ b \neq 1\}$ o si $\{a = -1 \ , \ b \neq \frac{1}{3}\}$.

(b) Nuestro sistema es:

$$\left\{\begin{array}{c} x + z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{array}\right. \equiv \left\{\begin{array}{c} x = 1 - z \\ x + 2y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{array}\right. \equiv \left\{\begin{array}{c} x = 1 - z \\ y = 0 \\ x + y + z = 1 \end{array}\right. \equiv \left\{\begin{array}{c} x = 1 - z \\ y = 0 \end{array}\right.$$

Elegimos como parámetro z y vemos que la solución es:

$$x = 1 - z, \ y = 0, \quad z \in \mathbb{R}$$

(2) Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, **1'5 puntos**

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x + y - z, x + y + 3z, z)$$

(a) Hallar la matriz de f respecto de las bases canónicas y las dimensiones del núcleo y de la imagen.
(b) Hallar una base de la imagen de f y una base del núcleo de f.
(c) Hallar un sistema de ecuaciones linealmente independientes del núcleo y de la imagen.

(a) La matriz que se pide es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Claramente, las dos primeras columnas son iguales. Eliminando una de ellas se observa que el rango de A es 2. Por tanto $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} A = 2$. Como $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = 3$, vemos que $\dim \ker f = 1$.

(b) Las columnas de A son un sistema generador de $\operatorname{Im} f$. Las dos primeras columnas son iguales. Claramente, la primera y tercera son linealmente independientes. Por tanto una base de $\operatorname{Im} f$ es $\{(1, 1, 1, 0), (1, -1, 3, 1)\}$.

Para calcular una base de $\ker f$ estudiamos el sistema

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + y - z &= 0 \\ x + y + 3z &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

La solución es $z = 0$, $y = -x$. Es decir, $\ker f = \{(x, -x, 0) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}$. Por tanto una base de $\ker f$ es $(1, -1, 0)$.

(c) Por el apartado b) un sistema de ecuaciones linealmente independientes del núcleo es

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

También por el mismo apartado, la imagen de f está generado por $\{(1, 1, 1, 0), (1, -1, 3, 1)\}$. Utilizando el método de Gauss. Partimos de la matriz

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ t \end{array} \mapsto \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} x \\ y - x + 2t \\ z - x - 2t \\ t \end{array}$$

y vemos que un conjunto de ecuaciones para $\operatorname{Im} f$ es

$$\begin{aligned} y - x + 2t &= 0 \\ z - x - 2t &= 0 \end{aligned}$$

(3) Dada la matriz siguiente $\boxed{\text{1'5 puntos}}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Halla el polinomio característico y los autovalores.
(b) Suponiendo que la matriz es diagonalizable, halla la matriz diagonal correspondiente y la matriz de cambio de base.
(c) Calcula la potencia n-ésima, A^n de la matriz A. (Deja el producto indicado como producto de tres matrices, sin calcular la matriz inversa)

(a) El polinomio característico es

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} &= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)\left(\lambda^2-\lambda-2\right). \end{aligned}$$

Los valores propios, son las raíces del polinomio característico. Las raíces de $\lambda^2-\lambda-2$ son

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = 2, -1.$$

Por lo que los valores propios son $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$.

(b) Como $dim\ S(-1) = 1$, la matriz es diagonalizable si y sólo si $dim\ S(2) = 2$. Calculamos los espacios de vectores propios.

El subespacio $S(2)$ de vectores propios asociados al valor propio $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo

$$\left.\begin{array}{r} -x-2y=0 \\ -x-2y=0 \end{array}\right\}$$

por lo que $S(2) = \{(-2y, y, z) : y, z \in \mathcal{R}\} =< (-2,1,0), (0,0,1) >$. Como $dimS(2) = 2$, la matriz es diagonalizable.

Calculamos $S(-1)$, el subespacio de vectores propios asociados al valor propio $\lambda_3 = -1$. El sistema que lo determina es

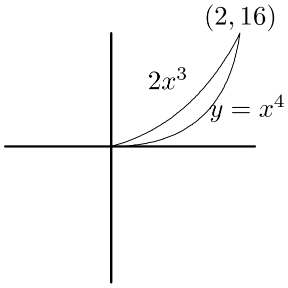
$$\left.\begin{array}{rcl} 2x-2y & = & 0 \\ -x+y & = & 0 \\ 3z & = & 0 \end{array}\right\}$$

por lo que $S(-1) = \{(y, y, 0) : y \in R\} =< (1,1,0) >$. Por tanto, $A = PDP^{-1}$ con

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Utilizando la misma notación que en el apartado (b);

$$A^n = PD^nP^{-1} = P\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}P^{-1}$$



(4) Dado el conjunto $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ definido $\boxed{\text{1'5 puntos}}$

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^4, y \leq 2x^3\}$$

se pide:

(a) Dibuja el conjunto $\mathcal{D}$ y halla los puntos de corte de las curvas que lo limitan.

(b) Estudia si $\mathcal{D}$ es *cerrado, abierto, acotado,compacto y convexo.* Razona la respuesta.

(c) Halla razonadamente los valores de b para que se pueda asegurar que la función

$$f(x, y) = \frac{1}{(x-5)^2} + \frac{1}{(y-b)^2}$$

alcanza el valor máximo y el valor mínimo en $\mathcal{D}$.

(a) Los puntos de corte verifican que $x^4 = 2x^3$, es decir, ó bien $x = 0$, ó bien $x = 2$. Los puntos de corte son, por tanto, $(0, 0)$ y $(2, 16)$

(b) El conjunto $\mathcal{D}$ es cerrado (ya que $Fr(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$), acotado (ya que$\mathcal{D} \subset B((0, 0); r)$ con r suficientemente grande) y, por tanto, compacto. No es convexo: basta coger dos puntos de $\mathcal{D}$ sobre la curva $y = 2x^3$.

(c) Necesitamos que la función sea continua en $\mathcal{D}$ por tanto $b \in \mathbb{R} \setminus [0, 16]$

(5) Sea $f(x,y) = x^{\alpha} y^{1-\alpha}$, con $0 < \alpha < 1$, la función de producción de Cobb-Douglas. **1 punto**

(a) Suponiendo que la dirección de máximo crecimiento de f en el punto $(1,1)$ viene dada por el vector unitario $u = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)$, hallar α.

(b) Suponiendo que la recta tangente a la curva de nivel que pasa por el punto $(1,1)$ es $x + 2y = 3$, hallar α.

Observación: Los valores de α hallados en los apartados (a) y (b) no tienen por qué coincidir.

(a) $\nabla f(1,1) = (\alpha, 1-\alpha) = \lambda(1,3)$. Por lo tanto,

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{1}{3}$$

de donde

$$3\alpha = 1 - \alpha$$

por lo que

$$\alpha = \frac{1}{4}$$

(b) Como $\nabla f(1,1) = (\alpha, 1-\alpha)$, la ecuación de la recta tangente a la curva de nivel en $(1,1)$ es

$$\begin{aligned}(\alpha, 1-\alpha)\cdot(x-1, y-1) = 0 \quad &\equiv \quad \alpha(x-1) + (1-\alpha)(y-1) = 0 \\ &\equiv \quad \alpha x + (1-\alpha)y = 1 \equiv \quad 3\alpha x + 3(1-\alpha)y = 3\end{aligned}$$

por lo que, como la recta tangente es $x + 2y = 3$, se deduce

$$\begin{aligned} 3\alpha &= 1 \\ 3(1-\alpha) &= 2 \end{aligned}$$

es decir

$$\alpha = \frac{1}{3}$$

(6) Considera la función $f(x,y) = 4ax^2 - 2by^2 - xy + 3y + 4x + 1$. **1 punto**

(a) Discutir, según los valores de los parámetros a y b, cuándo f es estrictamente cóncava.

(b) Calcular el polinomio de Taylor de segundo orden de $g(x,y) = x^3 + 4x^2 + 2y^2 - xy + 3y + 4x + 1$ alrededor del punto $(0,0)$.

(a) $\nabla f(x,y) = (8ax - y + 4, -4by - x + 3)$, de donde

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 8a & -1 \\ -1 & -4b \end{pmatrix}$$

Las condiciones de concavidad son

$$D_1 = 8a < 0$$
$$D_2 = -32ab - 1 > 0$$

por lo que $a < 0$ y $b > -1/(32a)$.

(b)

$$P_2(x,y) = g(0,0) + \nabla g(0,0) \cdot (x,y) + \frac{1}{2}(x,y)Hg(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 + (4,3) \cdot (x,y) + \frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(7) Considera la función $f(x,y) = ax^2 + y^3 - 2x - 3y$. Se pide $\boxed{\text{1 punto}}$

(a) Hallar los puntos críticos de f y clasificarlos en función de a para $a \neq 0$.

(b) Considérese el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$. Discutir según los valores de a si f alcanza extremos absolutos en A.

(a) $\nabla f(x,y) = (2ax - 2, 3y^2 - 3)$

$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff x = \frac{1}{a}; y = \pm 1$. Los puntos críticos son

$$(\frac{1}{a}, 1) \qquad (\frac{1}{a}, -1)$$

El Hessiano de f es $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$

i) Caso $a > 0$: $Hf(\frac{1}{a}, 1)$ es definida positiva, luego $(\frac{1}{a}, 1)$ es un mínimo relativo estricto. Y como $Hf(\frac{1}{a}, -1)$ es indefinida, $(\frac{1}{a}, -1)$ es un punto de silla.

ii) Caso $a < 0$: $Hf(\frac{1}{a}, 1)$ es indefinida, luego $(\frac{1}{a}, 1)$ es un punto de silla. Y como $Hf(\frac{1}{a}, -1)$ es definida negativa, $(\frac{1}{a}, -1)$ es un máximo relativo estricto.

b) Caso $a > 0$: $Hf(x,y)$ es definida positiva si y solo si $y > 0$, luego f es estrictamente convexa en A. (Obsérvese que $f(x,0) = ax^2 - 2x$, que es estrictamente convexa como función de x.) Como hay un punto crítico en el punto $(1/a, 1)$, este punto es un mínimo absoluto. No se alcanza máximo porque $\lim_{y\to\infty} f(0,y) = \infty$.

Caso $a < 0$: Como $D_1 = 2a < 0$ f no puede ser cóncava ni convexa en ningún punto de A, luego, a priori, no podemos afirmar nada. De hecho, $\lim_{y\to\infty} f(0,y) = \infty$, por lo que no se alcanza máximo. Y $\lim_{x\to\infty} f(x,0) = -\infty$, por lo que tampoco se alcanza mínimo.

(8) Sean $\boxed{\text{1'5 puntos}}$

$$f(x,y) = 4x - 2x^2 - 2y^2$$

y

$$S = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 25\}.$$

(a) Hallar los puntos críticos de f en el interior de S.
(b) Hallar los puntos sobre la frontera de S, que cumplen las condiciones de Lagrange para f.
(c) Hallar los extremos globales de f en el conjunto S.

(a) Calculamos los puntos estacionarios de f. Las derivadas son

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 4 - 4x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -4y \end{aligned}$$

Como las condiciones de primer orden son

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*,y^*) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x^*,y^*) &= 0 \end{aligned}$$

los puntos críticos de f satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 4 - 4x &= 0 \\ -4y &= 0 \end{aligned}$$

y obtenemos el punto crítico interior $(x^*, y^*) = (1, 0)$.

(b) El Lagrangiano $\mathcal{L}$ asociado es

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 4x - 2x^2 - 2y^2 + \lambda\left(25 - x^2 - y^2\right)$$

Las condiciones de primer orden son

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,\lambda) &= 4 - 4x - 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,\lambda) &= -4y - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 &= 25 \end{aligned}$$

Este sistema se puede reescribir como

$$\left.\begin{aligned} 2x + \lambda x &= 2 \\ y(2+\lambda) &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 25 \end{aligned}\right\}$$

De la segunda ecuación se deduce que ó bien $\lambda = -2$ ó bien $y = 0$. Como $\lambda = -2$ no es compatible con la primera ecuación, deducimos que $y = 0$. Sustituyendo este valor en la tercera ecuación obtenemos que $x = \pm 5$. Por tanto, las soluciones son

$$\begin{aligned} (x^*, y^*) &= (5, 0) \\ (x^*, y^*) &= (-5, 0) \end{aligned}$$

(c) Calculando el valor de la función en los puntos críticos,

$$\begin{aligned} f(1,0) &= 2 \\ f(5,0) &= -30 \\ f(-5,0) &= -70 \end{aligned}$$

vemos que $(1, 0)$ es el máximo y $(-5, 0)$ es el mínimo.