Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas II. Junio de 2002. **Modelo 1**

Apellidos:		**Nombre:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

(1) Dada la función, **1 punto**

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4, -x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4, x_3 + x_4, 3x_2 + x_4)$$

(a) Hallar la matriz de f respecto de las bases canónicas y su rango.

(b) Hallar la dimensión de la imagen, la dimensión del núcleo de f y una base de la imagen de f.

(a) La matriz de f respecto de las bases canónicas es $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Sumando la primera fila a la segunda obtenemos que el rango de M es

$$\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

ya que las tres primeras columnas son linealmente independientes.

(b) Utilizando el Teorema de la dimensión $4 = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f$. Como además, $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} M = 3$, vemos que $\dim \operatorname{Im} f = 3$, $\dim \ker f = 1$.

Ahora calculamos una base de $\operatorname{Im} f$. Este espacio está generado por los vectores obtenidos a partir de las columnas de M. Como tiene dimensión 3 es suficiente escoger tres de esos vectores que sean linealmente independientes. En el apartado anterior hemos visto que las tres primeras columnas de M son linealmente independientes. Entonces, el conjunto de vectores

$$\{(1, -1, 0, 0), (1, -1, 0, 3), (2, -2, 1, 0)\}$$

es una base de $\operatorname{Im} f$.

(2) Dado el siguiente sistema de ecuaciones, **1.5 puntos**

$$\left.\begin{array}{rcr} x+4y+z & = & c \\ 3x-y+2z & = & 1 \\ 2x-5y+az & = & -2 \end{array}\right\}$$

(a) Discute el sistema para los distintos valores de a y c.
(b) Resuelve el sistema en el caso en que sea compatible determinado.
(c) Resuelve el sistema en el caso en que sea compatible indeterminado.

(a) La matriz ampliada del sistema es $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 1 & c \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & a & -2 \end{array}\right)$. Restando a la segunda fila la primera, multiplicada por 3, y a la tercera fila la primera multiplicada por 2, obtenemos la matriz $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 1 & c \\ 0 & -13 & -1 & 1-3c \\ 0 & -13 & a-2 & -2-2c \end{array}\right)$. Cambiando el signo a la segunda fila y sumando esta fila a la tercera obtenemos $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 1 & c \\ 0 & 13 & 1 & 3c-1 \\ 0 & 0 & a-1 & c-3 \end{array}\right)$ de donde observamos, por el Teorema de Rouché-Frobenius, que si $a \neq 1$, el sistema es compatible determinado. Supongamos ahora que $a=1$. La matriz ampliada es $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 1 & c \\ 0 & 13 & 1 & 3c-1 \\ 0 & 0 & 0 & c-3 \end{array}\right)$. Aplicando de nuevo el Teorema de Rouché-Frobenius, vemos que si $c \neq 3$ el sistema es incompatible, mientras que si $c=3$, el sistema es compatible indeterminado. Concluimos que $\begin{cases} \text{si } a \neq 1 & \text{es compatible determinado,} \\ \text{si } a = 1 \quad \text{y} & \begin{cases} c=3 & \text{es compatible indeterminado,} \\ c \neq 3 & \text{es incompatible.} \end{cases} \end{cases}$

(b) Por el apartado (a), el sistema es compatible determinado cuando $a \neq 1$. Para este valor de a el sistema original es equivalente al sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x+4y+z & = & c \\ 13y+z & = & 3c-1 \\ (1-a)z & = & 3-c \end{array}\right\}$$

de donde despejamos

$$z=\frac{3-c}{1-a}, y=\frac{3c-1-z}{13}, x=c-4y-z$$

(c) El sistema es compatible indeterminado si $a=1$ y $c=3$. En este caso, es equivalente al sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x+4y+z & = & c \\ 13y+z & = & 8 \end{array}\right\}$$

y, utilizando z como parámetro, podemos despejar las variables

$$y=\frac{8-z}{13} \quad x=3-z-4y=7-9z$$

y el conjunto de soluciones es

$$\{(\frac{7-9z}{13}, \frac{8-z}{13}, z) : z \in \mathbb{R}\}$$

(3) Dada la matriz siguiente **1.5 puntos**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Halla el polinomio característico y los autovalores.
(b) Comprueba que la matriz es diagonalizable.
(c) Halla la matriz diagonal correspondiente y la matriz de cambio de base.

(a) El polinomio característico es

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(\lambda^2-\lambda-2)$$

Los valores propios, son las raíces del polinomio característico. Las raíces de $\lambda^2-\lambda-2=0$ son

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = -1, 2$$

Por tanto, los valores propios son $-1, -1, 2$.

(b) La multiplicidad del valor propio $\lambda = 2$ es 1, mientras que la multiplicidad del valor propio $\lambda = -1$ es 2. La matriz es diagonalizable si y sólo la dimensión del espacio de vectores propios $S(-1)$ es 2. Este espacio es el conjunto de soluciones del sistema lineal

$$\left.\begin{array}{rcl} x-2y+z & = & 0 \\ -x+2y-z & = & 0 \end{array}\right\}$$

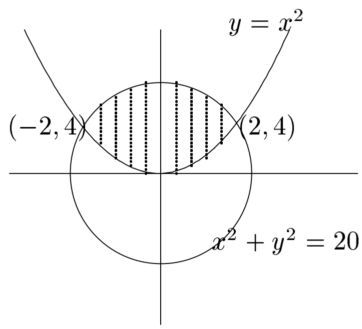
La segunda ecuación coincide con la primera cambiada de signo. El sistema es equivalente a $x-2y+z=0$. Claramente, hay dos parámetros. Despejando la variable z, vemos que $S(-1) = \{(2y-z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$. Una base de $S(-1)$ es $\{(2,1,0), (-1,0,1)\}$ y $\dim S(-1) = 2$, por lo que la matriz es diagonalizable.

(c) Ya sólo necesitamos calcular una base del espacio de vectores propios $S(2)$. Este espacio es el conjunto de soluciones del sistema lineal

$$\left.\begin{array}{rcl} -2x-2y+z & = & 0 \\ -x-y-z & = & 0 \\ -3z & = & 0 \end{array}\right\}$$

Por tanto, $z=0$, $y=-x$. Vemos que $S(2) = \{(x,-x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ y una base de $S(2)$ es $\{(1,-1,0)\}$. Por tanto $A = PDP^{-1}$ con

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



(4) Considera el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 20, y \geq x^2\}$. **1.5 puntos**

(a) Dibuja el conjunto y su frontera, hallando los puntos de corte de las curvas que la definen.

(b) Discute si el conjunto es cerrado, acotado y/o convexo.

(c) Sea la función $f : A \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{1}{(x-2)^2+y^2} + \frac{1}{(x+2)^2+y^2}$$

Discute, enunciando los teoremas que utilices, si f alcanza máximo y/o mínimo en A.

(a) Los puntos de corte están determinados por el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{rcl} x^2+y^2 & = & 20 \\ y & = & x^2 \end{array}\right\}$. Sustituyendo $y = x^2$ en la primera ecuación, obtenemos que debe verificarse que $x^2+x^4 = 20$. Llamando $z = x^2$, esta ecuación se convierte en $z^2 + z - 20 = 0$, cuyas soluciones son

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \frac{-1 \pm 9}{2} = -5, 4$$

Como $z = x^2$ debe ser positivo, tomamos la solución $z = 4$. Por tanto, $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$. En ambos casos, $y = 4$. Por lo que los puntos de corte son $(-2,4)$ y $(2,4)$.

(b) El conjunto es cerrado porque contiene a su frontera. Es acotado porque está contenido en el disco $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 20\}$ de centro $(0,0)$ y radio $\sqrt{20}$. Es convexo porque es la intersección de dos conjuntos convexos: $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 20\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$.

(c) La función f es continua excepto en los puntos que anulan alguno de los denominadores. Por tanto, f es continua excepto en los puntos $(2,0)$ y $(-2,0)$. Pero estos puntos no verifican la restricción $y \geq x^2$, por lo que no pertenecen al conjunto A. Por tanto, f es continua en A. Como A es cerrado y acotado, es un conjunto compacto. Por el teorema de Weierstrass, f alcanza el máximo y el mínimo en A.

(5) Sea $f(x,y) = x^{\alpha}y^{1-\alpha}$, con $0 < \alpha < 1$, la función de producción de Cobb-Douglas, donde $x > 0$ e $y > 0$ representan las unidades de trabajo y capital, respectivamente y $f(x,y)$ las unidades producidas. **1 punto**

(a) Hallar el gradiente de f en el punto (a,a), siendo $a > 0$.

(b) Supongamos que $\alpha = 1/4$. Hallar el polinomio de Taylor, $P(x,y)$, de orden 1 de f en el punto (a,a), siendo $a > 0$. Calcular $P(a + 0'1, a + 0'2)$.

---

a) Calculamos las derivadas parciales de f un un punto cualquiera (x,y).

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \alpha x^{\alpha-1}y^{1-\alpha}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = (1-\alpha)x^{\alpha}y^{-\alpha}$$

Sustituimos ahora $x = a$, $y = a$ y obtenemos

$$\nabla f(a,a) = (\alpha a^{\alpha-1}a^{1-\alpha}, (1-\alpha)a^{\alpha}a^{-\alpha}) = (\alpha, 1-\alpha)$$

b) Sustituyendo $\alpha = 1/4$ en la expresión anterior de $\nabla f(a,a)$ obtenemos

$$\nabla f(a,a) = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$$

Por tanto, el polinomio de Taylor de orden 1 de f en el punto (a,a) es

$$\begin{aligned} P(x,y) &= f(a,a) + \nabla f(a,a) \cdot (x-a, y-a) \\ &= a + \frac{1}{4}(x-a) + \frac{3}{4}(y-a) \end{aligned}$$

Sustituyendo $x = a + 0'1$, $y = a + 0'2$, obtenemos

$$P(a + 0'1, a + 0'2) = a + \frac{1}{4}0'1 + \frac{3}{4}0'2 = a + \frac{0'7}{4}$$

(6) Considera la función $f(x,y) = 2ax^2 + by^2 + xy - 2y - 7x + 12$. **1 punto**

(a) Discutir, según los valores de los parámetros a y b, cuándo f es estrictamente cóncava, suponiendo que ambos son distintos de 0.

(b) Discutir, según los valores de los parámetros a y b, cuándo f es estrictamente cóncava, cuando alguno de ellos es 0.

---

a) En primer lugar, calculamos el gradiente

$$\nabla f(x,y) = (4ax + y - 7, 2by + x - 2)$$

de donde obtenemos el Hessiano de f,

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 4a & 1 \\ 1 & 2b \end{pmatrix}$$

Las condiciones

$$D_1 = 4a < 0$$
$$D_2 = 8ab - 1 > 0$$

De la primera ecuación obtenemos que $a < 0$. Y de la segunda $ab > 1/8$. Teniendo en cuenta el signo de a, esto último ocurre cuando $b < 1/(8a)$.

b) Analizamos ahora qué ocurre si $a = 0$. El Hessiano sería

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2b \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es negativo $|Hf(x,y)| = -1$. Como es una matriz 2×2, la forma cuadrática asociada a $Hf(x,y)$ es indefinida.

Otra forma de comprobar esto sería calculando el polinomio característico

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 2b - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2b\lambda - 1$$

y obteniendo las raíces

$$\lambda = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 + 4}}{2} = b \pm \sqrt{b^2 + 1}$$

que son

$$\lambda_1 = b + \sqrt{b^2 + 1} > 0, \qquad \lambda_2 = b - \sqrt{b^2 + 1} < 0$$

Y vemos de nuevo que la forma cuadrática asociada al Hessiano es indefinida.

En resumen, concluimos que f es estrictamente cóncava si y sólo si $a < 0$ y $b < 1/(8a)$.

(7) Considera la función $f(x,y) = x^3 + y^2 + 2axy$. Se pide **1'5 puntos**

(a) Hallar los puntos críticos de f para el caso en que $a \neq 0$.
(b) Clasificar los puntos críticos de f para el caso $a \neq 0$.
(c) Hallar y clasificar los puntos críticos de f para el caso $a = 0$.

---

a) La función es diferenciable. Los puntos críticos son aquellos en los que se anula el gradiente. Como

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 + 2ay, 2y + 2ax)$$

los puntos críticos son la solución del sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x^2 + 2ay & = & 0 \\ 2y + 2ax & = & 0 \end{array}\right\}$$

Multiplicando la segunda ecuación por a vemos que $2ay = -2a^2x$. Ahora sustituimos esta expresión en la primera ecuación y obtenemos $0 = 3x^2 - 2a^2x = x(3x - 2a^2)$ cuyas soluciones son $x = 0$ y $x = \frac{2a^2}{3}$. Como $y = -ax$, los puntos críticos son $(0,0)$ y $(\frac{2a^2}{3}, -\frac{2a^3}{3})$.

b) La matriz Hessiana es $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 2a \\ 2a & 2 \end{pmatrix}$. En el punto $(0,0)$ se obtiene $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 2a & 2 \end{pmatrix}$. El determinante $|Hf(0,0)| = -4a^2$ es negativo. Como $Hf(0,0)$ es una matriz 2×2, su forma cuadrática asociada es indefinida.

Alternativamente, podemos calcular el polinomio característico

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2a \\ 2a & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 4a^2$$

cuyas raíces son

$$\frac{2 \pm \sqrt{4 + 16a^2}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 + 4a^2}$$

es decir,

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{1 + 4a^2} > 0, \lambda_2 = 1 - \sqrt{1 + 4a^2} < 0$$

por lo que $Hf(0,0)$ es indefinida y $(0,0)$ es un punto de silla.

En el punto $(\frac{2a^2}{3}, -\frac{2a^3}{3})$ se obtiene $Hf(\frac{2a^2}{3}, -\frac{2a^3}{3}) = \begin{pmatrix} 4a^2 & 2a \\ 2a & 2 \end{pmatrix}$. Vemos que

$$D_1 = 4a^2 > 0$$
$$D_2 = 8a^2 - 4a^2 = 4a^2 > 0$$

por lo que el punto es mínimo local.

c) En el caso en que $a = 0$, se obtiene que el único punto crítico es $(0,0)$ y la matriz Hessiana en este punto es $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, que es semidefinida positiva. Por tanto, el Hessiano no proporciona información concluyente. Sin embargo, para $t > 0$ observamos que

$$f(-t,0) = -t^3 < f(0,0) < t^3 = f(t,0)$$

lo que implica que $(0,0)$ es un punto de silla.

(8) Considera la función $f(x,y) = (x+1)^3 + y^2$. **1 punto**

(a) Escribe las ecuaciones de Lagrange que determinan los extremos de f en el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

(b) Calcula y clasifica los extremos de f en el conjunto A.

---

a) El lagrangiano es

$$L = (x+1)^3 + y^2 + \lambda(1 - x^2 - y^2)$$

por lo que las ecuaciones de Lagrange son

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 3(x+1)^2 - 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2y - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

La segunda ecuación es equivalente a $y(1-\lambda) = 0$, por lo que o bien $y = 0$ o bien $\lambda = 1$.

Si $y = 0$, la última ecuación se reduce a $x^2 = 1$, por lo que $x = \pm 1$. Por tanto, los puntos

$$(1,0), \quad (-1,0)$$

son soluciones de las Ecuaciones de Lagrange.

Si $\lambda = 1$, la primera ecuación es $3(x+1)^2 - 2x = 0$, es decir,

$$3x^2 + 4x + 3 = 0.$$

Pero, en este caso, las raíces

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 36}}{6}$$

son complejas.

Por tanto, los únicos candidatos a máximo y mínimo son los puntos $(1,0)$ y $(-1,0)$. Como,

$$\begin{aligned} f(1,0) &= 8 \\ f(-1,0) &= 0 \end{aligned}$$

el punto $(1,0)$ es un máximo y el punto $(-1,0)$ es un mínimo.