Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía   Exámen final de Matemáticas II. Junio de 2001   Modelo 1

APELLIDOS:		**NOMBRE:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

1. Sean $v_1 = (0,1,1,0)$, $v_2 = (1,0,0,1)$, $v_3 = (1,1,1,1)$ y $v_4 = (-1,1,1,-1)$ un sistema generador del subespacio vectorial S de $\mathbb{R}^4$. Razona si las siguientes afirmaciones son correctas o no.

a) La dimensión de S es 4 ya que la dimensión de $\mathbb{R}^4$ es 4 y el número de vectores que forman el sistema generador de $\mathbb{R}^4$ es 4.
b) $\{v_1, v_2, v_3, v_4, \alpha v_2 + \beta v_3\}$ es también sistema generador de S $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
c) Una base de S está dada por los vectores $\{\alpha v_1 + \beta v_3, v_3\}$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y por tanto dim $S = 2$.

1,5 puntos

2. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por $f(x, y, z) = (2x + 2y + 2z, -x - y - z, 3x + 2y + z, x + y + z)$.

a) Determinar la matriz de f respecto de las bases canónicas.
b) Calcular la dimensión de $\mathrm{N}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ y dar una base para cada uno de estos subespacios.

1 punto

3. Encontrar los máximos y los mínimos de la función $x^2 + 2x + y^2$ sobre el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 6x^2 + 9y^2 = 96\}$.

1,5 puntos

4. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula el polinimio característico y comprueba que $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$ son autovalores.

b) Estudia si es o no diagonalizable y, en caso afirmativo, encuentra la matriz diagonal J y una matriz de paso P de forma que $A = PJP^{-1}$.

1,5 puntos

5. Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Estudiar si f es continua en $(0,0)$
b) Calcula las derivadas parciales de f en $(0,0)$.

1 punto

6. Dada la función $f(x,y) = e^{x^2-1} + ye^{-y}$.

a) Calcular la dirección de máximo crecimiento de esta función en el punto $(1,0)$.
b) Calcular el valor aproximado de $f\,(1.01,\ 0.01)$ usando la aproximación por el plano tangente de 1^o orden o el Polinomio de Taylor de orden 1.

1 punto

7. Sea $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ 3x + y \leq 12,\ x + 3y \leq 12\right\}$. Se pide:

a) Dibujar el conjunto.
b) Estudiar si el conjunto A es cerrado, acotado y/o convexo.
c) Considera $f : A \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \dfrac{1}{(x-3)^2 + (y-1)^2} + \dfrac{1}{(x-1)^2 + (y-3)^2}$. Estudia si f alcanza máximo y/o mínimo global en A.

1,5 puntos

8. Dada $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2y^2 - 4x$. Hallar y clasificar sus puntos críticos.

1 punto