

(1) Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{cases} x + 2y + az = 5 \\ 3x + by - 3z = 15 \\ 2x + 4y - 2z = 10 \end{cases}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) **(20 puntos)** Clasifica el sistema según los valores de a y b .

Solución: La matriz asociada al sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 5 \\ 3 & b & -3 & 15 \\ 2 & 4 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

Realizamos las siguientes operaciones

$$\text{fila } 2 \mapsto \text{fila } 2 - 3 \times \text{fila } 1$$

$$\text{fila } 3 \mapsto \text{fila } 3 - 2 \times \text{fila } 1$$

Y obtenemos que el sistema original es equivalente a otro cuya matriz aumentada es la siguiente

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 5 \\ 0 & b-6 & -3a-3 & 0 \\ 0 & 0 & -2a-2 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que

(i) si $a \neq -1$ y $b \neq 6$, entonces $\text{rango } A = 3 = \text{rango}(A|b)$. El sistema es compatible determinado (solución única).

(ii) Si $a = 1$ y $b \neq 6$, obtenemos que el sistema original es equivalente a otro cuya matriz aumentada es la siguiente

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & b-6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos que $\text{rango } A = \text{rango}(A|b) = 2$. El sistema es compatible indeterminado con $3 - 2 = 1$ parámetro.

(iii) Si $a \neq -1$ y $b = 6$, obtenemos que el sistema original es equivalente a otro cuya matriz aumentada es la siguiente

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 5 \\ 0 & 0 & -3a-3 & 0 \\ 0 & 0 & -2a-2 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos que $\text{rango } A = \text{rango}(A|b) = 2$. El sistema es compatible indeterminado con $3 - 2 = 1$ parámetro.

(iv) Si $a = -1$ y $b = 6$, el sistema original es equivalente a otro cuya matriz aumentada es la siguiente

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos que $\text{rango } A = 1 = \text{rango}(A|b) = 1$. El sistema es compatible indeterminado con $3 - 1 = 2$ parámetros.

(b) **(10 puntos)** Resuelve el sistema anterior para todos los valores de a y b . Debes indicar explícitamente el número de parámetros en la solución.

Solución: De la sección anterior vemos inmediatamente que:

- (i) *si $a \neq -1$ y $b \neq 6$ hay una solución única $x = 5, y = z = 0$*
- (ii) *Si $a = -1$ y $b \neq 6$, el conjunto de soluciones es $\{(x, 0, x - 5) : x \in \mathbb{R}\}$ y está descrito por un parámetro.*
- (iii) *Si $a \neq -1$ y $b = 6$, el conjunto de soluciones es $\{(5 - 2y, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}$*
- (iv) *Si $a = -1$ and $b = 6$, el conjunto de soluciones es $\{(x, y, x + 2y - 5) : x, y \in \mathbb{R}\}$ y está descrito por dos parámetros.*

(2) Considera el conjunto

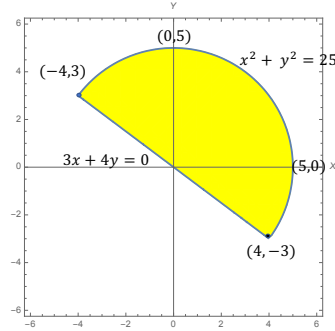
$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 4y \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq 25\}$$

y la función

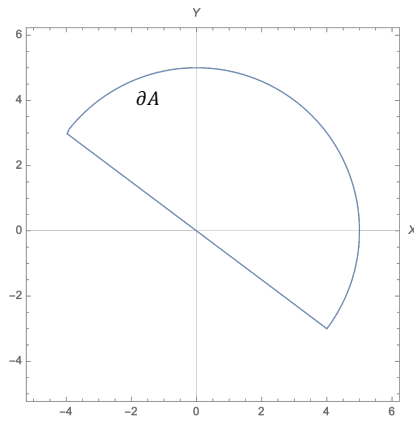
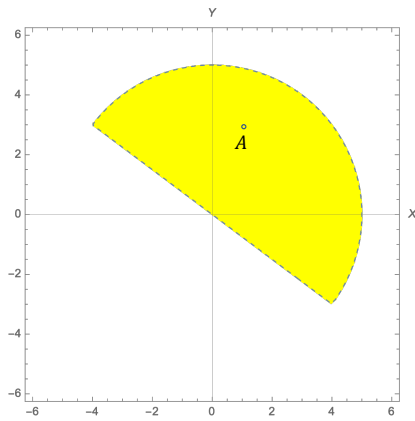
$$f(x, y, z) = e^{4y-3x}$$

- (a) **(20 puntos)** Esboza la gráfica del conjunto A , su frontera y su interior, y justifica si es abierto, cerrado, acotado, compacto o convexo.

Solución:



El interior y la frontera son



Las funciones $h_1(x, y) = 3x + 4y$ y $h_2(x, y) = x^2 + y^2 - 25$ son continuas (ya que son polinomios) y $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h_1(x, y) \geq 0, \quad h_2(x, y) \leq 0\}$. Por lo tanto, el conjunto A es cerrado (obsérvese también que $\partial A \subset A$). No es abierto porque $A \cap \partial A \neq \emptyset$.

El conjunto A está contenido en la caja $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -5 \leq x \leq 5, \quad -5 \leq y \leq 5\}$. Por lo tanto, el conjunto A es compacto.

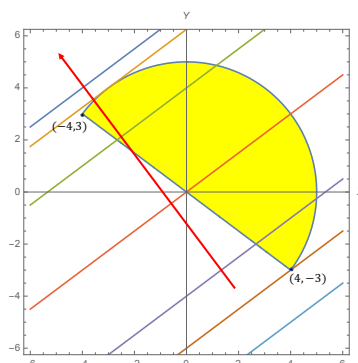
A continuación mostramos que A también es convexo. La función $x^2 + y^2 - 25$ es convexa. Por lo tanto, el conjunto $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 25\}$ es convexo. Por otro lado, la función $3x + 4y$ es convexa y cóncava. Por lo tanto, el conjunto $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 4y \geq 0\}$ también es convexo. Concluimos entonces que el conjunto $A = A_1 \cap A_2$ es también convexo.

- (b) **(10 puntos)** Enuncia el Teorema de Weierstrass. Determina si es posible aplicar el Teorema de Weierstrass a la función f definida sobre A .

Solución: El conjunto A es compacto. Por lo tanto, se puede aplicar el teorema de Weierstrass.

- (c) **(10 puntos)** Dibuja las curvas de nivel de f , indicando la dirección de crecimiento de la función.

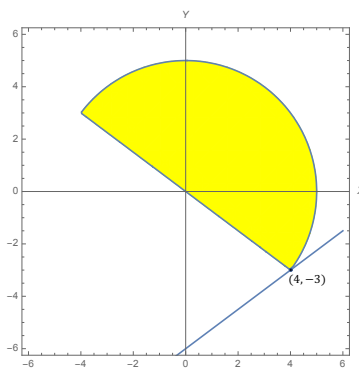
Solución: Para $C > 0$, las curvas de nivel $e^{4y-3x} = C$ son las curvas de nivel de $4y - 3x = \ln C$, las cuales son líneas rectas de la forma $y = \frac{3x}{4} + \ln C$. Gráficamente,



La flecha roja representa la dirección de crecimiento de la función f .

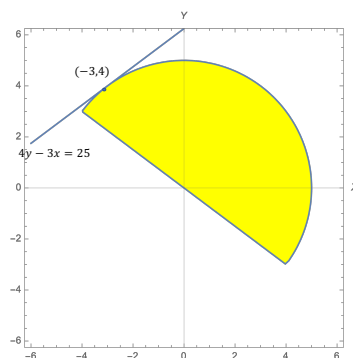
- (d) **(20 puntos)** Utilizando las curvas de nivel de f , determina (si existen) los puntos extremos globales de f en el conjunto A .

Solución: Gráficamente, vemos que el valor mínimo se alcanza en el punto $(4, -3)$. El valor mínimo es $f(4, -3) = e^{-25}$.



El valor máximo se alcanza en el punto (a, b) donde la recta $y = \frac{3x}{4} + \ln C$ es tangente a la gráfica de la función $y(x)$ definida implícitamente por $x^2 + y^2 = 25$. En este punto tenemos $2a + 2by'(a) = 0$. Así, $y'(a) = -a/b$. Por otro lado, la pendiente de la recta $y = \frac{3x}{4} + \ln C$ es $m = \frac{3}{4}$. Por lo tanto $a = -\frac{3b}{4}$ y debemos tener $(\frac{3b}{4})^2 + b^2 = 25$ o $b = \pm 4$. Gráficamente, vemos que $b = 4$ y $a = -3$. El valor máximo es

$$f(-3, 4) = e^{25}$$



(3) Considera el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2xy + y^2 + z^4 &= 2 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

- (a) **(10 puntos)** Utilizando el teorema de la función implícita, demuestra que el sistema de ecuaciones anterior determina implícitamente dos funciones derivables $y(x)$ y $z(x)$ en un entorno del punto $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, -1)$.

Solución: Observamos primero que $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, -1)$ es una solución del sistema de ecuaciones. Las funciones $f_1(x, y, z) = 2xy + y^2 + z^4 - 2$ y $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$ son de clase C^∞ . Calculamos

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix}_{(x,y,z)=(0,1,-1)} = \begin{vmatrix} 2x+2y & 4z^3 \\ 2y & 0 \end{vmatrix}_{(x,y,z)=(0,1,-1)} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 8$$

Por el teorema de la función implícita, el sistema de ecuaciones anterior determina implícitamente dos funciones derivables $y(x)$ y $z(x)$ en un entorno del punto $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, -1)$.

- (b) **(20 puntos)** Calcula

$$y'(x), \quad z'(x)$$

en el punto $x_0 = 0$.

Solución: Derivando implícitamente con respecto a x ,

$$(1) \quad 2xy'(x) + 2y(x)y'(x) + 2y(x) + 4z(x)^3 z'(x) = 0$$

$$(2) \quad 2y(x)y'(x) + 2x = 0$$

(3)

Sustituimos los valores $x = 0, y(0) = 1, z(0) = -1$ para obtener lo siguiente:

$$2y'(0) - 4z'(0) + 2 = 0$$

$$2y'(0) = 0$$

Así,

$$y'(0) = 0, \quad z'(0) = \frac{1}{2}$$

- (c) **(20 puntos)** Calcula

$$y''(x), \quad z''(x)$$

en el punto $x_0 = 0$.

Solución: Derivando la ecuación 1 con respecto a x obtenemos

$$2xy''(x) + 2y(x)y''(x) + 2y'(x)^2 + 4y'(x) + 4z(x)^3 z''(x) + 12z(x)^2 z'(x)^2 = 0$$

$$2y(x)y''(x) + 2y'(x)^2 + 2 = 0$$

Sustituimos los valores $x = 0, y(0) = 1, z(0) = -1, y'(0) = 0, z'(0) = \frac{1}{2}$ para obtener lo siguiente:

$$2y''(0) - 4z''(0) + 3 = 0$$

$$2y''(0) + 2 = 0$$

Así,

$$y''(0) = -1, \quad z''(0) = \frac{1}{4}$$

- (4) Clasifica la siguiente forma cuadrática $Q(x, y, z) = ax^2 - 2axz + az^2 + 2bxy - 2byz + y^2$ según los valores de $b \in \mathbb{R}$. **(30 puntos)**

Solución: La matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} a & b & -a \\ b & 1 & -b \\ -a & -b & a \end{pmatrix}$$

Tenemos $D_1 = a$, $D_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ b & 1 \end{vmatrix} = a - b^2$. Para calcular D_3 observamos que la última columna es igual a la primera columna con signo negativo. Por lo tanto, $D_3 = |A| = 0$. Vemos inmediatamente que si $a > b^2$, la forma cuadrática Q es semidefinida positiva. Si $a < b^2$ tenemos $D_2 < 0$. Por lo tanto, la forma cuadrática Q es indefinida. Si $a = b^2$, entonces la matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} b^2 & b & -b^2 \\ b & 1 & -b \\ -b^2 & -b & b^2 \end{pmatrix}$$

que tiene rango 1. Por lo tanto, $D_3 = 0$ y todos los menores de orden 2 de la matriz son 0 y tenemos $a_{22} = 1 > 0$. Por lo tanto, la matriz es semidefinida positiva. También podemos ver esto porque sustituyendo $a = b^2$ en Q obtenemos

$$\begin{aligned} Q(x, y, z) &= b^2x^2 - 2b^2xz + b^2z^2 + 2bxy - 2byz + y^2 \\ &= b^2(x^2 - 2xz + z^2) + 2b(x - z)y + y^2 \\ &= b^2(x - z)^2 + 2b(x - z)y + y^2 = (b(x - z) + y)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

- (5) Considera los puntos extremos de la función

$$f(x, y, z) = 3x - 4y + 12z$$

en el conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 169\}$$

- (a) **(10 puntos)** Escribe la función Lagrangiana y las ecuaciones de Lagrange.

Solución: *El Lagrangiano es*

$$L(x, y, z) = 3x - 4y + 12z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 169)$$

Las ecuaciones de Lagrange son

$$\begin{aligned} 3 - 2\lambda x &= 0 \\ -2\lambda y - 4 &= 0 \\ 12 - 2\lambda z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 169 \end{aligned}$$

- (b) **(20 puntos)** Calcula la(s) solución(es) de las ecuaciones de Lagrange.

Solución: *Despejando x , y , z en las tres primeras ecuaciones, obtenemos*

$$x = \frac{3}{2\lambda}, \quad y = -\frac{2}{\lambda}, \quad z = \frac{6}{\lambda},$$

Sustituimos estos valores en la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ para obtener

$$\frac{169}{4\lambda^2} = 169$$

Obtenemos $\lambda^2 = \frac{1}{4}$. Es decir,

$$\lambda = -\frac{1}{2}, \quad x = -3, \quad y = 4, \quad z = -12$$

y

$$\lambda = \frac{1}{2}, \quad x = 3, \quad y = -4, \quad z = 12$$

- (c) **(20 puntos)** Utiliza las condiciones de segundo orden para determinar si la(s) solución(es) de las ecuaciones de Lagrange corresponden a un valor máximo o mínimo local de f en S .

Solución: *La matriz Hessiana asociada al Lagrangiano es*

$$HL(x, y, z; \lambda) = \begin{pmatrix} -2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix}$$

En el punto $(-3, 4, -12)$ obtenemos

$$HL\left(-3, 4, -12; -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la cual es definida positiva. Por lo tanto, el punto $(-3, 4, -12)$ corresponde a un mínimo local. El valor mínimo es -169 . En el punto $(3, -4, 12)$ obtenemos

$$HL\left(3, -4, 12; \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

la cual es definida negativa. Por lo tanto, el punto $(3, -4, 12)$ corresponde a un máximo local. El valor máximo es 169 .

- (d) **(20 puntos)** ¿Alguna de las soluciones de las ecuaciones de Lagrange corresponde a un máximo o mínimo global de la función f en el conjunto S ?

Solución: *El conjunto S está acotado porque está contenido en la bola*

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 169\}$$

También es cerrado porque la función $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 169$ es continua y $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : h(x, y, z) = 0\}$. Por lo tanto, el conjunto S es compacto y la función f , al ser continua, alcanza un máximo global y un mínimo global en S . Estos puntos deben satisfacer las ecuaciones de Lagrange y, por tanto, coinciden con los puntos extremos calculados en el apartado (b).