

- (1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{cases} x + 2y + az &= 5 \\ 3x + by - 3z &= 15 \\ 2x + 4y - 2z &= 10 \end{cases}$$

donde  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- (a) **(20 puntos)** Clasifique el sistema según los valores de  $a, b \in \mathbb{R}$ .  
 (b) **(10 puntos)** Resuelva el sistema de ecuaciones para todos los valores de  $a$  y  $b$ . Debe especificar claramente el número de parámetros en la solución.
- (2) Considere el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 4y \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq 25\}$$

y la función

$$f(x, y) = e^{4y-3x}$$

- (a) **(20 puntos)** Dibuje el conjunto  $A$ , su frontera y su interior. Justifique si el conjunto  $A$  es abierto, cerrado, acotado, compacto o convexo.  
 (b) **(10 puntos)** Enuncie el teorema de Weierstrass. Determine si es posible aplicar el teorema de Weierstrass a la función  $f$  definida en el conjunto  $A$ .  
 (c) **(10 puntos)** Dibuje las curvas de nivel de la función  $f$ , indicando la dirección de crecimiento de la función.  
 (d) **(20 puntos)** Utilizando las curvas de nivel de la función  $f$ , determine (en caso de que existan) los puntos extremos globales de la función  $f$  en el conjunto  $A$ .

- (3) Considere el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2xy + y^2 + z^4 &= 2 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

- (a) **(10 puntos)** Utilizando el teorema de la función implícita, demuestre que el anterior sistema de ecuaciones determina implícitamente dos funciones diferenciables  $y(x)$  y  $z(x)$  en un entorno del punto  $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, -1)$ .  
 (b) **(20 puntos)** Calcule

$$y'(x), \quad z'(x)$$

en el punto  $x_0 = 0$ .

- (c) **(20 puntos)** Calcule

$$y''(x), \quad z''(x)$$

en el punto  $x_0 = 0$ .

- (4) Clasifique la forma cuadrática  $Q(x, y, z) = ax^2 - 2axz + az^2 + 2bxy - 2byz + y^2$  en función de los valores de  $a, b \in \mathbb{R}$ . **(30 puntos)**

- (5) Considere los puntos extremos de la función

$$f(x, y, z) = 3x - 4y + 12z$$

en el conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 169\}$$

- (a) **(10 puntos)** Escriba la función Lagrangiana y las ecuaciones de Lagrange.  
 (b) **(20 puntos)** Encuentre las soluciones de las ecuaciones de Lagrange.  
 (c) **(20 puntos)** Utilice las condiciones de segundo orden para determinar si las soluciones de las ecuaciones de Lagrange corresponden a un valor máximo o mínimo local de la función  $f$  en el conjunto  $S$ .  
 (d) **(20 puntos)** ¿Alguna de las soluciones de las ecuaciones de Lagrange corresponde a un valor máximo o mínimo global de  $f$  en el conjunto  $S$ ?