

- (1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{cases} -x + ay + 2z = a \\ 2x + ay - z = 2 \\ ax + 2z = a \end{cases}$$

donde $a \in \mathbb{R}$.

- (a) **(20 puntos)** Clasifique el sistema según los valores de a .

Solución: La matriz ampliada asociada al sistema es

$$\begin{pmatrix} -1 & a & 2 & a \\ 2 & a & -1 & 2 \\ a & 0 & 2 & a \end{pmatrix}$$

Hacemos las operaciones siguientes

$$\text{fila } 2 \mapsto \text{fila } 2 + 2 \times \text{fila } 1$$

$$\text{fila } 3 \mapsto \text{fila } 3 + a \times \text{fila } 1$$

Y obtenemos que el sistema original es equivalente a otro cuya matriz aumentada es

$$\begin{pmatrix} -1 & a & 2 & a \\ 0 & 3a & 3 & 2+2a \\ 0 & a^2 & 2+2a & a+a^2 \end{pmatrix}$$

Ahora hacemos $\text{fila } 3 \mapsto \text{fila } 3 - \frac{a}{3}\text{fila } 2$ y obtenemos

$$\begin{pmatrix} -1 & a & 2 & a \\ 0 & 3a & 3 & 2a+2 \\ 0 & 0 & a+2 & \frac{1}{3}a(a+1) \end{pmatrix}$$

Así vemos que

- (i) si $a \notin \{-2, 0\}$, entonces el $\text{rango } A = 3 = \text{rango}(A|b) = 3$. El sistema es compatible determinado.
- (ii) Si $a = 0$, entonces la el sistema original es equivalente a otro sistema cuya matriz ampliada es

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que $\text{rango } A = 2 < \text{rango}(A|b) = 3$. Por lo tanto el sistema es incompatible.

- (iii) Finalmente, si $a = -2$, entonces el sistema original es equivalente a otro sistema cuya matriz ampliada es

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -6 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

con $\text{rango } A = 2 < \text{rango}(A|b) = 3$ y por lo tanto el sistema también es incompatible.

- (b) **(10 puntos)** Resuelva el sistema de ecuaciones para los valores de a para los que el sistema sea compatible.

Solución: El sistema es compatible determinado si $a \notin \{-2, 0\}$. En este caso la solución es

$$x = \frac{4+a}{3(a+2)}, \quad y = \frac{(a+1)(a+4)}{3a(a+2)}, \quad z = \frac{a(a+1)}{3(a+2)}$$

(2) Considere el conjunto

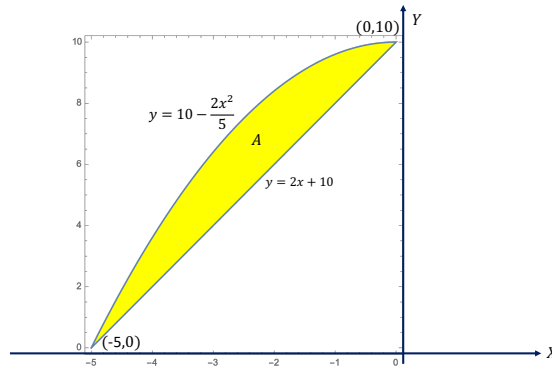
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 10 \leq y \leq 10 - \frac{2x^2}{5}\}$$

y la función

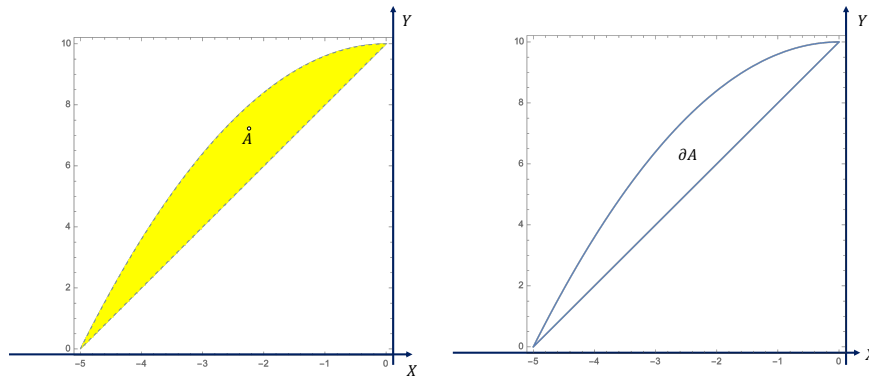
$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- (a) **(20 puntos)** Dibuje el conjunto A , su frontera y su interior. Justifique si el conjunto A es abierto, cerrado, acotado, compacto o convexo.

Solución: El conjunto A es aproximadamente como en el siguiente gráfico.



El interior y la frontera del conjunto son



El conjunto A cerrado porque $\partial A \subset A$. No es abierto porque $A \cap \partial A \neq \emptyset$. Es acotado. Por lo tanto, el conjunto A es compacto. Es convexo porque el conjunto A es la intersección de dos conjuntos convexos $A = B \cap C$ con $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 10 \leq y\}$ y $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 10 - \frac{2x^2}{5}\}$. El conjunto B es convexo porque es un semiplano. El conjunto C es convexo porque la función $g(x) = 10 - \frac{2x^2}{5}$ es cóncava. Puesto que A es la intersección de dos conjuntos convexos, es también un conjunto convexo.

- (b) **(10 puntos)** Enuncie el teorema de Weierstrass. Determine si es posible aplicar el teorema de Weierstrass a la función f definida en el conjunto A .

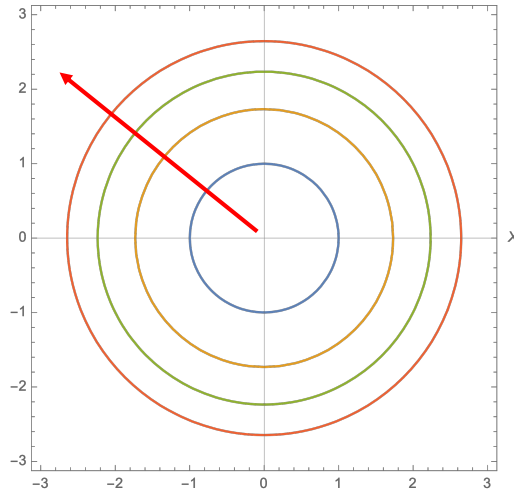
Solución: El conjunto A es compacto. La función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ es continua en $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto, la función f es continua en todos los puntos de A . El teorema de Weierstrass se cumple y la función alcanza su máximo y su mínimo global sobre el conjunto A .

- (c) **(10 puntos)** Dibuje las curvas de nivel de la función f , indicando la dirección de crecimiento de la función.

Solución: Para $D \geq 0$, las curvas de nivel $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} = D$ son círculos

$$x^2 + y^2 = D^2 = C$$

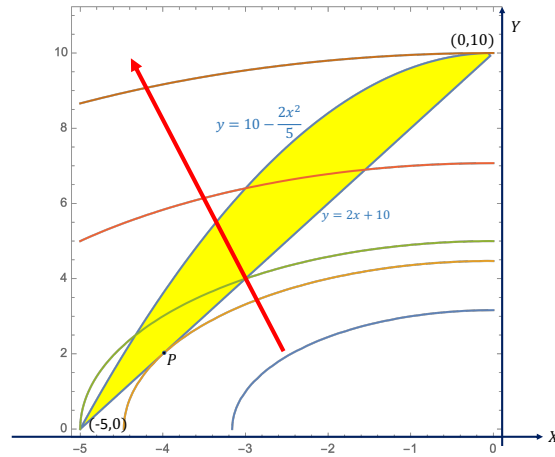
Gráficamente,



En la figura se representan las curvas de nivel en varios colores. La flecha roja representa la dirección de crecimiento de la función f .

- (d) **(20 puntos)** Utilizando las curvas de nivel de la función f , determine (en caso de que existan) los puntos extremos globales de la función f en el conjunto A .

Solución: Gráficamente,



vemos que el máximo valor de la función se alcanza en el punto $(0,10)$ y su máximo valor es $f(0,10) = 10$.

El mínimo global se alcanza en el punto $P = (a,b)$ donde la recta $y = 2x + 10$ es tangente a la gráfica de la función $y(x)$ definida implícitamente por $x^2 + y^2 = C$. En dicho punto tenemos que $2x + 2yy' = 0$. Es decir, $a + by'(a) = 0$. Por otro lado, la pendiente de la recta $y = 2x + 10$ es $m = 2$. Por lo tanto, $y'(a) = 2$ y tenemos que $a + 2b = 0$, $b = 2a + 10$. Por lo tanto, $a = -4$, $b = 2$. El valor mínimo de f se alcanza en el punto $P = (-4, 2)$ y $f(-4, 2) = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

(3) Considere la función $f(x, y) = 5x^3 - 2xy - x + 3y^2 - \frac{4y}{3}$.

(a) **(10 puntos)** Determine los puntos críticos de la función f en el conjunto $\mathbb{R}^2$.

Sugerencia: $\sqrt{784} = 28$.

Solución: El vector gradiente de la función f es

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \left(15x^2 - 2y - 1, -2x + 6y - \frac{4}{3} \right)$$

Las ecuaciones que definen los puntos críticos son

$$\begin{aligned} 15x^2 - 2y - 1 &= 0 \\ -2x + 6y - \frac{4}{3} &= 0 \end{aligned}$$

cuya solución es $\left(-\frac{13}{45}, \frac{17}{135}\right)$ y $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

(b) **(20 puntos)** Clasifique los puntos críticos calculados en el apartado anterior en máximos/mínimos (locales o globales) y puntos de silla.

Solución: La matriz hessiana es

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 30x & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Calculamos el valor de la matriz hessiana en los distintos puntos críticos

$$H\left(-\frac{13}{45}, \frac{17}{135}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{26}{3} & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

- Para el punto $\left(-\frac{13}{45}, \frac{17}{135}\right)$ tenemos que $D_1 = -\frac{26}{3} < 0$, $D_2 = -56 < 0$. La forma cuadrática es indefinida. Por lo tanto, $\left(-\frac{13}{45}, \frac{17}{135}\right)$ es un punto de silla.
- Para el punto $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ tenemos que $D_1 = 10 > 0$, $D_2 = 56 > 0$. La forma cuadrática es definida positiva. Por lo tanto, $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ corresponde a un mínimo local estricto.

Por otro lado podemos observar que $f(x, 0) = 5x^3 - x$. Entonces, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(0, x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x, 0) = -\infty$. No existen extremos globales.

(c) **(10 puntos)** Determine el mayor subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ donde la función f es convexa.

Solución: Necesitamos encontrar el mayor conjunto de puntos abierto y convexo en $\mathbb{R}^2$ donde la matriz hessiana sea definida o semidefinida positiva para todos sus puntos. Esto ocurre cuando $D_1 = 30x > 0$ y $D_2 = 180x - 4 > 0$ luego la solución es $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > \frac{1}{45}\}$.

(d) **(10 puntos)** Determine todas las soluciones locales y globales del problema siguiente

$$\begin{aligned} \max / \min \quad & f(x, y) = 5x^3 - 2xy - x + 3y^2 - \frac{4y}{3} \\ \text{en el conjunto} \quad & A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > \frac{1}{4}\} \end{aligned}$$

Solución: Por lo visto en la parte (a) los puntos críticos son $\left(-\frac{13}{45}, \frac{17}{135}\right)$ y $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Sólomente el punto $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ satisface la restricción $x > \frac{1}{4}$. También hemos visto que la función f es convexa en el conjunto de puntos $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > \frac{1}{45}\}$ y como se cumple que

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > \frac{1}{4} \right\} \subset S$$

vemos que la función también es convexa en el conjunto A . Podemos concluir diciendo que el punto crítico $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ corresponde a un mínimo global del problema.

(4) Considere el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned}x^3 + 5xy + z^2 &= 2 \\xz + 2yz &= -1\end{aligned}$$

- (a) **(10 puntos)** Demuestre que el anterior sistema de ecuaciones determina implícitamente dos funciones diferenciables $y(x)$ y $z(x)$ en un entorno del punto $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, -1)$.

Solución: Observamos que $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, -1)$ es una solución del sistema de ecuaciones. Las funciones $f_1(x, y, z) = x^3 + 5xy + z^2$ y $f_2(x, y, z) = xz + 2yz$ son de clase C^∞ . Calculamos

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix}_{(x,y,z)=(1,0,-1)} = \begin{vmatrix} 5x & 2z \\ 2z & x+2y \end{vmatrix}_{(x,y,z)=(1,0,-1)} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Por el teorema de la función implícita, el anterior sistema de ecuaciones determina implícitamente dos funciones diferenciables $y(x)$ y $z(x)$ en un entorno del punto $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, -1)$.

- (b) **(20 puntos)** Calcule

$$y'(x), \quad z'(x)$$

en el punto $x_0 = 1$.

Solución: Derivando implícitamente con respecto de x ,

$$\begin{aligned}3x^2 + 5xy'(x) + 5y(x) + 2z(x)z'(x) &= 0 \\ 2z(x)y'(x) + 2y(x)z'(x) + xz'(x) + z(x) &= 0\end{aligned}$$

Introducimos los valores $x = 1$, $y(1) = 0$, $z(1) = -1$ para obtener el siguiente sistema

$$\begin{aligned}5y'(1) - 2z'(1) + 3 &= 0 \\ -2y'(1) + z'(1) - 1 &= 0\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$y'(1) = -1, \quad z'(1) = -1$$

- (c) **(10 puntos)** Calcule el polinomio de Taylor de orden 1 de las funciones $y(x)$ y $z(x)$ en el punto $x_0 = 1$.

Solución: El polinomio de Taylor de orden 1 de la función $y(x)$ en el punto x_0 es

$$Q_1(x) = y(1) + y'(1)(x - x_0)$$

Esto es,

$$Q_1(x) = 0 - (x - 1) = 1 - x$$

El polinomio de Taylor de orden 1 de la función $z(x)$ en el punto x_0 es

$$P_1(x) = z(1) + z'(1)(x - x_0)$$

Esto es,

$$P_1(x) = -1 - (x - 1) = -x$$

- (5) Considere los puntos extremos de la función

$$f(x, y) = x^3 - x + y^2 + 2$$

en el conjunto

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 - 4x + 2y^2 = 0\}$$

- (a) **(10 puntos)** Escriba la función Lagrangiana y las ecuaciones de Lagrange.

Solución: *El Lagrangiano es*

$$L(x, y) = x^3 - x + y^2 + 2 + \lambda (2x^2 - 4x + 2y^2)$$

Las ecuaciones de Lagrange son

$$\begin{aligned} 3x^2 + \lambda(4x - 4) - 1 &= 0 \\ 4\lambda y + 2y &= 0 \\ 2x^2 - 4x + 2y^2 &= 0 \end{aligned}$$

- (b) **(20 puntos)** Encuentre las soluciones de las ecuaciones de Lagrange.

Solución: *De la segunda ecuación obtenemos $(2\lambda + 1)y = 0$. Por lo que o bien $y = 0$ o bien $\lambda = -\frac{1}{2}$. Sustituyendo $y = 0$ en la tercera ecuación obtenemos $x^2 = 2x$. Por lo tanto, $x = 0$ o $x = 2$. Tenemos las soluciones*

$$x = 0, y = 0, \lambda = -\frac{1}{4}$$

y

$$x = 2, y = 0, \lambda = -\frac{11}{4}$$

Sustituyendo $\lambda = -\frac{1}{2}$ en la primera ecuación obtenemos $3x^2 - 2x + 1 = 0$. Pero esta ecuación no tiene soluciones reales.

- (c) **(20 puntos)** Utilice las condiciones de segundo orden para determinar si las soluciones de las ecuaciones de Lagrange corresponden a un valor máximo o mínimo local de la función f en el conjunto S .

Solución: *La matriz hessiana asociada a la función lagrangiana es*

$$HL(x, y; \lambda) = \begin{pmatrix} 4\lambda + 6x & 0 \\ 0 & 4\lambda + 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$HL\left(0, 0; -\frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que es indefinida. La forma cuadrática asociada es $Q(x, y, z) = -x^2 + y^2$. Calculamos el espacio tangente $T_{(0,0)}S$. Sea $g_1(x, y) = 2x^2 - 4x + 2y^2$. Tenemos, $\nabla g_1(x, y) = (4x - 4, 4y)$, $\nabla g_1(0, 0) = (-4, 0)$. Por lo tanto,

$$T_{(0,0)}S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (-4, 0) \cdot (x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\}$$

Sustituyendo $x = 0$ en $Q(x, y)$, obtenemos $\bar{Q}(y) = Q(0, y) = y^2 > 0$ si $y \neq 0$. Por lo tanto, $\bar{Q}(y)$ es definida positiva y el punto crítico condicionado $(0, 0)$ corresponde a un mínimo local de f en S . Por otra parte,

$$HL\left(2, 0; -\frac{11}{4}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$$

que es indefinida. La forma cuadrática asociada es $Q(x, y) = x^2 - 9y^2$. Además, $\nabla g_1(2, 0) = (4, 0)$, Por lo tanto,

$$T_{(2,0)}S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (4, 0) \cdot (x, y) = 0\} = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\}$$

Sustituyendo $x = 0$, en $Q(x, y)$, obtenemos $\bar{Q}(y) = Q(0, y) = -9y^2 < 0$ si $y \neq 0$. Por lo tanto, $\bar{Q}(z)$ es definida negativa y el punto crítico condicionado $(2, 0)$ corresponde a un máximo local de f en S .

- (d) **(10 puntos)** ¿Alguna de las soluciones de las ecuaciones de Lagrange corresponde a un valor máximo o mínimo global de f en el conjunto S ?

Solución: La restricción $2x^2 - 4x + 2y^2 = 0$ puede escribirse como $x^2 + (2 - x)^2 + 2y^2 = 4$. El conjunto S es compacto porque $0 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 1$ en S . Se puede aplicar el teorema de Weierstrass y la función f alcanza un máximo global en $(2, 0)$ y un mínimo global en $(0, 0)$ en S . Los valores son $f(2, 0) = 8$ y $f(0, 0) = 2$.

Otra manera de probar que el conjunto S es compacto: El valor máximo de la función $4x - 2x^2$ es 2. Por lo tanto, en S : $2y^2 = 4x - 2x^2 \leq 2$. Y vemos que $-1 \leq y \leq 1$. Pero, ahora tenemos que, en S , la función $2y^2 = 4x - 2x^2$ toma valores entre 0 y 2. Por lo tanto $0 \leq x \leq 2$. La gráfica de la función $4x - 2x^2$ ayuda.