

(1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{cases} 2x + 3y + az = 2a - 1 \\ x + 2y + z = 1 \\ 5x + 6y + (4a - 3)z = b \end{cases}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) **(10 puntos)** Clasifique el sistema según los valores de a y b .

Solución: La matriz ampliada asociada al sistema es

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & a & 2a - 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 4a - 3 & b \end{pmatrix}$$

Intercambiamos la fila 1 con la fila 2 para obtener

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a & 2a - 1 \\ 5 & 6 & 4a - 3 & b \end{pmatrix}$$

Luego hacemos las operaciones siguientes

$$\text{fila } 2 \mapsto \text{fila } 2 - 2 \times \text{fila } 1$$

$$\text{fila } 3 \mapsto \text{fila } 3 - 5 \times \text{fila } 1$$

Y obtenemos que el sistema original es equivalente a otro cuya matriz aumentada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a - 2 & 2a - 3 \\ 0 & -4 & 4(a - 2) & b - 5 \end{pmatrix}$$

Ahora hacemos $\text{fila } 3 \mapsto \text{fila } 3 - 4\text{fila } 2$ y obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a - 2 & 2a - 3 \\ 0 & 0 & 0 & -8a + b + 7 \end{pmatrix}$$

Así vemos que

- (i) si $b \neq 8a - 7$, entonces el $\text{rango } A = 2 < \text{rango}(A|b) = 3$. El sistema es incompatible y no tiene solución.
- (ii) si $b = 8a - 7$, entonces el $\text{rango } A = \text{rango}(A|b) = 2$. El sistema es compatible indeterminado con $3 - 2 = 1$ parámetros.

(b) **(10 puntos)** Resuelva el sistema de ecuaciones para los valores de a y b para los que el sistema sea compatible.

Solución: Necesitamos que $b = 8a - 7$. El sistema de ecuaciones propuesto es equivalente al siguiente sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -y + (a - 2)z = 2a - 3 \end{cases}$$

La solución es

$$z \in \mathbb{R}, \quad x = -5 + 4a + (3 - 2a)z, \quad y = 3 - 2a + (a - 2)z$$

(2) Considere el conjunto

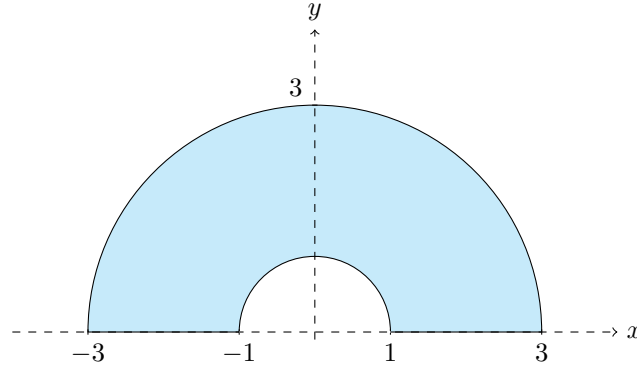
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0\}$$

y la función

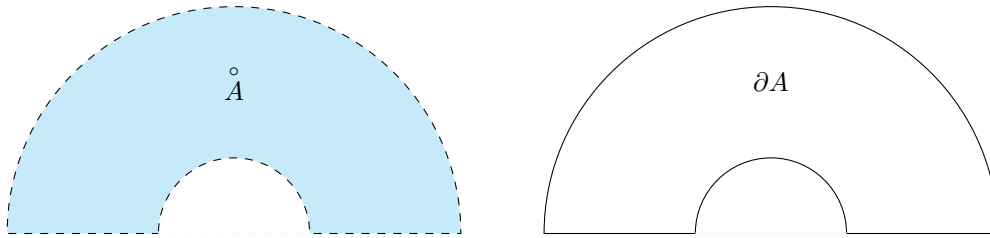
$$f(x, y) = \frac{1}{5 - x + y}$$

- (a) **(10 puntos)** Dibuje el conjunto A , su frontera y su interior. Justifique si el conjunto A es abierto, cerrado, acotado, compacto o convexo.

Solución: El conjunto A es aproximadamente el siguiente gráfico representado en azul.

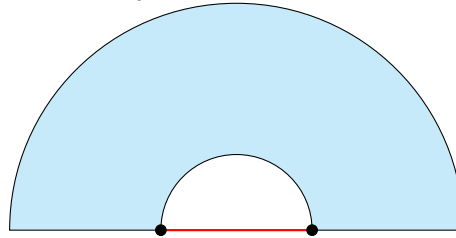


El interior y la frontera del conjunto son



Las funciones $h_1(x, y) = x^2 + y^2$, $h_2(x, y) = y$ son continuas y $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq h_1(x, y) \leq 9, h_2(x, y) \geq 0\}$. Por lo tanto el conjunto A es cerrado porque $\partial A \subset A$. No es abierto al ser $A \cap \partial A \neq \emptyset$. Podemos ver que si $(x, y) \in A$, entonces $\|(x, y)\| \leq 9$ y el conjunto A es acotado y por lo tanto es también compacto al ser cerrado y acotado a la vez.

No es un conjunto convexo ya que los puntos $(-1, 0), (1, 0) \in A$. Pero, el segmento que los une no está totalmente contenido dentro del conjunto A .

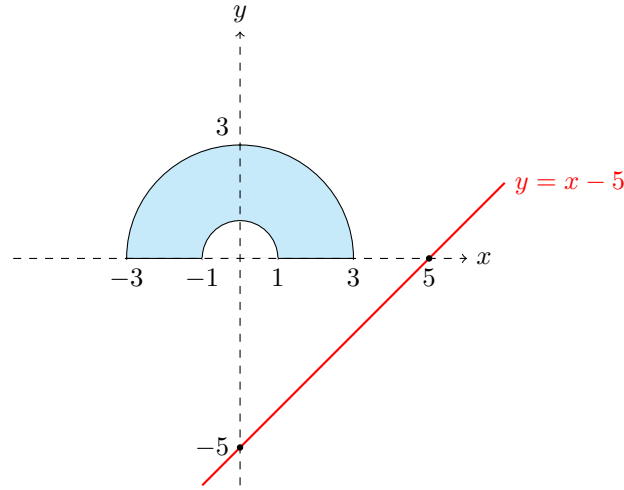


- (b) **(10 puntos)** Determine si es posible aplicar el teorema de Weierstrass a la función f definida en el conjunto A .

Solución: El conjunto A es compacto. La función

$$f(x, y) = \frac{1}{5 - x + y}$$

es continua en su dominio de definición $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x \neq 5\}$. Observar que la recta $y = x - 5$ no intersecta con el conjunto A , gráficamente,



Por lo tanto, la función f es continua en todos los puntos de A , así el teorema de Weierstrass se cumple y la función alcanza su máximo y su mínimo global sobre el conjunto A .

- (c) **(5 puntos)** Dibuje las curvas de nivel de la función f , indicando la dirección de crecimiento de la función.

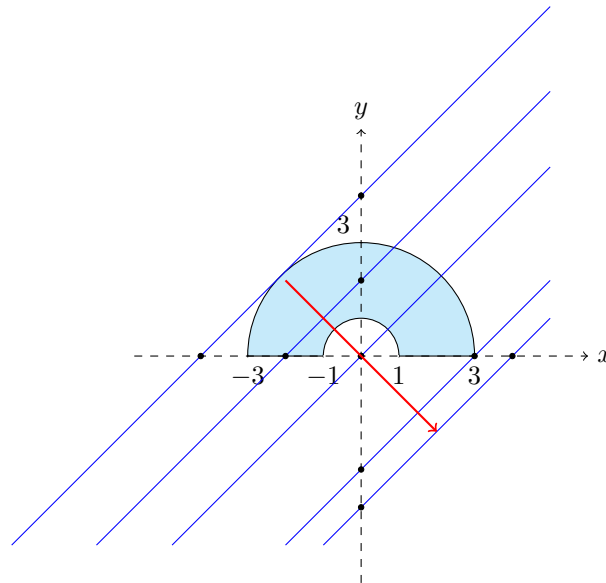
Solución: Las curvas de nivel

$$f(x, y) = \frac{1}{5 - x + y} = D$$

son líneas rectas de la forma

$$y = x + \frac{1}{D} - 5$$

Gráficamente,



En la figura se representan las curvas de nivel en color azul. La flecha roja representa la dirección de crecimiento de la función f .

- (d) **(5 puntos)** Utilizando las curvas de nivel de la función f , determine (en caso de que existan) los puntos extremos globales de la función f en el conjunto A .

Solución: Gráficamente, vemos que el máximo valor de la función se alcanza en el punto $(3, 0)$ y su máximo valor es $f(3, 0) = 1/2$.

El mínimo global se alcanza en el punto (a, b) donde la recta $y = x + \frac{1}{D} - 5$ es tangente a la gráfica de la función $y(x)$ definida implícitamente por $x^2 + y^2 = 9$. En dicho punto tenemos que $2x + 2yy' = 0$. Así, $y'(x) = -x/y(x)$. En el punto $x = a$, $y(a) = b$, tenemos $y'(a) = -a/b$. Por otro lado, la pendiente de la recta $y = x + \frac{1}{D} - 5$ es $m = 1$. Por lo tanto $a = -b$ y tenemos $2a^2 = 9$ cuya solución válida es $a = -\frac{3}{\sqrt{2}}$. El mínimo de f se alcanza en el punto $\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$,

y su valor es

$$f\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{5 + 2\frac{3}{\sqrt{2}}} = \frac{5 - 3\sqrt{2}}{7}.$$

(3) Considere la función $f(x, y) = 2x^3 - 6a^2x + 3y^2 - 2y^3 - 1$, con $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

(a) **(10 puntos)** Determine los puntos críticos de la función f en el conjunto $\mathbb{R}^2$.

Solución: El vector gradiente de la función f es

$$\vec{\nabla} f(x, y) = (6x^2 - 6a^2, 6y - 6y^2)$$

Las ecuaciones que definen los puntos críticos son

$$6x^2 = 6a^2$$

$$6y = 6y^2$$

cuya solución es $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(a, 1)$ y $(-a, 1)$.

(b) **(10 puntos)** Clasifique los puntos críticos calculados en el apartado anterior en máximos/mínimos (locales o globales) y puntos de silla.

Solución: La matriz hessiana es

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 12x & 0 \\ 0 & 6 - 12y \end{pmatrix}$$

Calculamos el valor de la matriz hessiana en los distintos puntos críticos

$$H(a, 0) = \begin{pmatrix} 12a & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad H(-a, 0) = \begin{pmatrix} -12a & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix},$$

$$H(a, 1) = \begin{pmatrix} 12a & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}, \quad H(-a, 1) = \begin{pmatrix} -12a & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

- El punto $(a, 0)$ corresponde a un mínimo local si $a > 0$ y a un punto de silla cuando $a < 0$;
- El punto $(-a, 0)$ es un punto de silla si $a > 0$ y corresponde a un mínimo local si $a < 0$;
- El punto $(a, 1)$ es un punto de silla si $a > 0$ y corresponde a un máximo local si $a < 0$;
- El punto $(-a, 1)$ corresponde a un máximo local si $a > 0$ y a un punto de silla si $a < 0$.

Por otro lado podemos observar que $f(0, y) = 3y^2 - 2y^3 - 1$. Entonces, $\lim_{y \rightarrow \infty} f(0, y) = -\infty$ y $\lim_{y \rightarrow -\infty} f(0, y) = +\infty$. Luego podemos afirmar que no existen extremos globales.

(c) **(5 puntos)** Determine el mayor subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ donde la función f es convexa.

Solución: Necesitamos encontrar el mayor conjunto de puntos abierto y convexo en $\mathbb{R}^2$ donde la matriz hessiana sea definida o semidefinida positiva para todos sus puntos. Esto ocurre cuando $D_1 = 12x \geq 0$ y $D_2 = 12x(6 - 12y) \geq 0$ luego la solución es

$$S = \text{int} \left(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0; \frac{1}{2} \geq y\} \right) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y < \frac{1}{2}\}$$

(d) **(5 puntos)** Determine todas las soluciones locales y globales del problema siguiente

$$\max / \min \quad g(x, y) = 2x^3 - 24x + 3y^2 - 2y^3 - 1$$

$$\text{en el conjunto} \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, y < \frac{1}{4}\}$$

Solución: La función g se obtiene de la función f tomando el valor $a = 2$. Por lo visto en la parte (a) los puntos críticos son $(2, 0)$, $(-2, 0)$, $(2, 1)$ y $(-2, 1)$, pero solamente el punto $(2, 0)$ satisface las restricciones $x > 1$, $y < \frac{1}{4}$. Por otro lado, por la parte (c) la función g es convexa en el conjunto de puntos $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0; y < \frac{1}{2}\}$ y como se cumple que

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, y < \frac{1}{4}\} \subset S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y < \frac{1}{2}\}$$

vemos que la función g también es convexa en el conjunto A . Podemos concluir diciendo que el punto crítico $(2, 0)$ es un punto mínimo global del problema.

(4) Considere el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} t + xz^2 - 2y &= -5 \\ t^3 + x + y^2 - z &= 4 \end{aligned}$$

- (a) **(5 puntos)** Demuestre que el anterior sistema de ecuaciones determina implícitamente dos funciones diferenciables $y(t, x)$ y $z(t, x)$ en un entorno del punto $(t_0, x_0, y_0, z_0) = (-1, 1, 2, 0)$.

Solución: Observamos que $(t_0, x_0, y_0, z_0) = (-1, 1, 2, 0)$ es una solución del sistema de ecuaciones. Las funciones $f_1(t, x, y, z) = t + xz^2 - 2y - 5$ and $f_2(t, x, y, z) = t^3 + x + y^2 - z - 4$ son de clase C^∞ . Calculamos

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix}_{(t,x,y,z)=(-1,1,2,0)} = \begin{vmatrix} -2 & 2xz \\ 2y & -1 \end{vmatrix}_{(t,x,y,z)=(-1,1,2,0)} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Por el teorema de la función implícita, el anterior sistema de ecuaciones determina implícitamente dos funciones diferenciables $y(t, x)$ y $z(t, x)$ en un entorno del punto $(t_0, x_0, y_0, z_0) = (-1, 1, 2, 0)$.

- (b) **(10 puntos)** Calcule

$$\frac{\partial y}{\partial t}, \quad \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial t}, \quad \frac{\partial z}{\partial x},$$

en el punto $(-1, 1)$.

Solución: Derivando implícitamente con respecto de x ,

$$\begin{aligned} -2 \frac{\partial y}{\partial x}(t, x) + 2x \frac{\partial z}{\partial x}(t, x) z(t, x) + z(t, x)^2 &= 0 \\ 2y(t, x) \frac{\partial y}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial z}{\partial x}(t, x) + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Introducimos los valores $(t, x) = (-1, 1)$, $(y(-1, 1), z(-1, 1)) = (2, 0)$ para obtener el siguiente sistema

$$\begin{aligned} -2 \frac{\partial y}{\partial x}(-1, 1) &= 0 \\ 4 \frac{\partial y}{\partial x}(-1, 1) - \frac{\partial z}{\partial x}(-1, 1) + 1 &= 0 \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\frac{\partial y}{\partial x}(-1, 1) = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(-1, 1) = 1$$

Derivando ahora implícitamente con respecto de t ,

$$\begin{aligned} -2 \frac{\partial y}{\partial t}(t, x) + 2xz(t, x) \frac{\partial z}{\partial t}(t, x) + 1 &= 0 \\ 2y(t, x) \frac{\partial y}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial z}{\partial t}(t, x) + 3t^2 &= 0 \end{aligned}$$

Introducimos los valores $(t, x) = (-1, 1)$, $(y(-1, 1), z(-1, 1)) = (2, 0)$ para obtener el sistema

$$\begin{aligned} 1 - 2 \frac{\partial y}{\partial t}(-1, 1) &= 0 \\ 4 \frac{\partial y}{\partial t}(-1, 1) - \frac{\partial z}{\partial t}(-1, 1) + 3 &= 0 \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\frac{\partial y}{\partial t}(-1, 1) = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial z}{\partial t}(-1, 1) = 5$$

- (c) **(5 puntos)** Calcule el polinomio de Taylor de orden 1 de la función $z(t, x)$ en el punto $(t_0, x_0) = (-1, 1)$.

Solución: El polinomio de Taylor de orden 1 para la función $z(t, x)$ en el punto (t_0, x_0) es

$$P_1(t, x) = z(-1, 1) + \frac{\partial z}{\partial t}(-1, 1)(t - t_0) + \frac{\partial z}{\partial x}(-1, 1)(x - x_0)$$

Esto es,

$$P_1(t, x) = 0 + 5(t + 1) + (x - 1) = 5(t + 1) + x - 1$$

- (d) **(5 puntos)** Utilice el polinomio de Taylor de orden 1 de la función $z(t, x)$ en el punto $(t_0, x_0) = (-1, 1)$ para encontrar una aproximación del valor de $z(-0.9, 1.1)$.

Solución: $z(-0.9, 1.1) \approx P_1(-0.9, 1.1) = 5 \cdot 0.1 + 0.1 = 0.6$.

- (5) Considere los puntos extremos de la función

$$f(x, y) = xy - 3x - 6y$$

en el conjunto

$$S = \{(x, y) : x + 2y = 20\}$$

- (a) **(10 puntos)** Escriba la función Lagrangiana y las ecuaciones de Lagrange.

Solución: *El Lagrangiano es*

$$L(x, y) = xy - 3x - 6y + \lambda(20 - x - 2y)$$

Las ecuaciones de Lagrange son

$$\begin{aligned} y - 3 - \lambda &= 0 \\ x - 6 - 2\lambda &= 0 \\ 20 - x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

- (b) **(5 puntos)** Encuentre las soluciones de las ecuaciones de Lagrange.

Solución: *Multiplicando la primera ecuación por 2 y comparandola con la segunda ecuación obtenemos $x = 2y$. Sustituyendo $x = 2y$ en la tercera ecuación, obtenemos $2x = 4y = 20$. Por lo tanto la solución es*

$$x = 10, \quad y = 5, \quad \lambda = 2$$

- (c) **(10 puntos)** Utilice las condiciones de segundo orden para determinar si las soluciones de las ecuaciones de Lagrange corresponden a un valor máximo o mínimo local de la función f en el conjunto S .

Solución: *La matriz hessiana asociada a la función lagrangiana es*

$$HL(x, y; \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la cual es indefinida. La forma cuadrática asociada es

$$Q(x, y) = 2xy$$

Calculamos el espacio tangente $T_{(10,5)}S$. Let $g(x, y) = x + 2y - 20$. Tenemos, $\nabla g(x, y) = (1, 2)$, $\nabla g(10, 5) = (1, 2)$. Por lo tanto,

$$T_{(10,5)}S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\} = \{(-2y, y) : y \in \mathbb{R}\}$$

Sustituyendo $x = -2y$ en $Q(x, y)$, obtenemos $\bar{Q}(y) = Q(-2y, y) = -4y^2 < 0$ si $y \neq 0$. Por lo tanto, $\bar{Q}(y)$ es definida negativa y el punto crítico condicionado $(10, 5)$ corresponde a un máximo local de f en S .

- (d) **(5 puntos)** ¿Alguna de las soluciones de las ecuaciones de Lagrange corresponde a un valor máximo o mínimo global de f en el conjunto S ?

Solución: *El conjunto de puntos S no es compacto y por lo tanto el teorema de Weierstrass no nos sirve. Sin embargo, substituyendo la restricción $x = 20 - 2y$ dentro de la función, obtenemos $f(20 - 2y, y) = -2y^2 + 20y - 60$. Esta es una función cóncava con un único maximizador global. Además, como $\lim_{y \rightarrow \infty} f(20 - 2y, y) = -\infty$, la función $f(20 - 2y, y)$ no tienen mínimo global. Por lo tanto, podemos decir que el punto $(10, 5)$ corresponde a un máximo global de f en S .*