Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas II. 31 de mayo de 2021.

---

(1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+y+z &=& b \\ ax+y+az &=& a \\ x+ay+z &=& 1 \end{array}\right.$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son parámetros.

(a) Clasifique el sistema según los valores de a y b. **10 puntos**

(b) Resuelva el sistema de ecuaciones para el valor $a = -1$ **10 puntos**

(2) Considere el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, \;\; y \leq 2 - x, \;\; y \geq x - 2\}$$

y la función

$$f(x, y) = -\ln\left((x+1)^2 + y^2\right)$$

(a) Dibuje el conjunto A y justifique si es abierto, cerrado, acotado, compactoo o convexo. **10 puntos**

(b) Enuncie el teorema Weierstrass. Determine si es posible aplicar este teorema a la función f definida en el conjunto A. Utilizando las curvas de nivel, determine (en caso de que existan) los puntos extremos globales de la función f en el conjunto A. **10 puntos**

(3) Considere la función $f(x, y) = x^2 + 4xy - 2x + 2y^3 + 6y^2 - 20y$.

(a) Determine el mayor subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ donde la función f es estrictamente cóncava o convexa. **10 puntos**

(b) Encuentre los puntos críticos de f y clasifíquelos en máximos/mínimos (locales o globales) y puntos de silla. **10 puntos**

(4) Considere el conjunto de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} xz + yz &=& -4 \\ x + y^2 - z &=& -2 \end{array}$$

(a) Demuestre que el anterior sistema de ecuaciones determina implícitamente dos funciones diferenciables $y(x)$ y $z(x)$ en un entorno del punto $(x, y, z) = (-1, -1, 2)$. **10 puntos**

(b) Calcule

$$y'(-1), z'(-1)$$

y el polinomio de Taylor de orden uno de las funciones $y(x)$ y $z(x)$ en el punto $x_0 = -1$. **10 puntos**

(5) Considere los puntos extremos de la función

$$f(x, y) = 2x^3 - y^3$$

en el conjunto

$$S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 5\}$$

(a) Escriba la función Lagrangiana, las ecuaciones de Lagrange y encuentra las soluciones. **10 puntos**

(b) Encuentre el máximo y el mínimo global de f en el conjunto S. **10 puntos**