

Sesión 1

Matemáticas para la Economía II

Matrices. Determinantes. Rango de una Matriz. Matriz Inversa. El método de eliminación de Gauss-Jordan.

Grados en Administración de Empresas, Finanzas y Contabilidad, Empresa y Tecnología, Estudios Internacionales y Administración de Empresas y Derecho y Administración de Empresas

Universidad Carlos III de Madrid

Definición. Matriz diagonal. Matriz identidad

- Una matriz $n \times m$ es un conjunto de $n \times m$ números reales ordenados en n filas y m columnas.

- $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

- Los elementos a_{ii} se llaman la **diagonal** de A .
- Matriz diagonal.

- Matriz identidad de orden n :
$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz traspuesta. Traza. Operaciones con matrices

- $A^t = A^* =$ es la matriz traspuesta de A : fila i de A^* igual a la columna i de A .
- Ejemplo
- Si $A \in M_{n \times m}$, entonces $A^t \in M_{m \times n}$.
- **traza** de A es $\text{traza}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$.
- Suma: $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{j=1, \dots, m}^{i=1, \dots, n}$, $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{j=1, \dots, m}^{i=1, \dots, n}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+1 & 1+4 & 3+0 \\ 9+5 & 6+(-2) & 5+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 14 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

- Multiplicación por un escalar: $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{j=1, \dots, m}^{i=1, \dots, n}$,
 $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{j=1, \dots, m}^{i=1, \dots, n}$.

$$7A = \begin{pmatrix} 7 \cdot 2 & 7 \cdot 1 & 7 \cdot 3 \\ 7 \cdot 9 & 7 \cdot 6 & 7 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 7 & 21 \\ 63 & 42 & 35 \end{pmatrix}$$

Propiedades

- 1 $A + B = B + A$ (conmutativa).
- 2 $A + (B + C) = (A + B) + C$ (asociativa).
- 3 $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
- 4 $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
- 5 $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.
- 6 $(A + B)^t = A^t + B^t$.

Multiplicación de matrices

- Se necesita que $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$ sea una matriz $n \times m$ y $B = (b_{ij})$ una de tamaño $m \times l$. Esto es, el número de columnas de la matriz A debe ser igual al número de filas de la matriz B .
- $C = A \cdot B$ es la matriz

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}$$

esto es, el elemento de C en la posición i, j del producto se obtiene multiplicando la fila i de A por la columna j de B .

•

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 7 & -4 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

la matriz $C = A \cdot B$ es la matriz 2×2

$$C = \begin{pmatrix} 49 & 8 = 2 \cdot 6 + 1 \cdot (-4) + 5 \cdot 0 \\ 13 & -18 \end{pmatrix}$$

Propiedades del Producto de Matrices

- $(AB)^t = B^t A^t$.
- AB no es siempre igual a BA .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

then,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

- $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

en este caso, puede calcularse $A \cdot B$. Pero, $B \cdot A$ no está definida

Matrices equivalentes. Forma escalonada

- B es **equivalente** a A si podemos transformar A en B usando una combinación de las siguientes operaciones elementales:
 - ▶ Multiplicar una fila de A por un número real diferente de cero.
 - ▶ Intercambiar dos filas.
 - ▶ Añadir a una fila de A otra fila.

Estas tres operaciones pueden describirse mediante producto de matrices

- $A \in M_{n \times m}$ **matriz escalonada** (por filas) si se satisface:
 - 1 Todas las filas nulas están al final de la matriz.
 - 2 Para cada fila $i = 1, \dots, n$, si el primer elemento no nulo es a_{ij} (es decir, $a_{ij} \neq 0$ y $a_{ik} = 0$ para todo $k < j$), entonces $a_{l,k} = 0$ para todo $l > i$ y todo $k \leq j$.
- si la matriz A es una forma escalonada, entonces dada una fila i , si su primer elemento que no es cero es a_{ij} entonces $a_{kl} = 0$ siempre que $k > i$ y $l \leq j$. En una matriz escalonada, cada fila (excepto, quizás la primera) empieza con un 0 y cada fila $i + 1$ empieza con un cero más que la anterior fila i .

Ejemplos

- $$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

son matrices en su forma escalonada.

- $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

no es una matriz escalonada.

El método de eliminación de Gauss-Jordan

- nos da una manera sistemática de obtener una forma escalonada de cualquier matriz por medio de operaciones elementales.
- Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 1 & 7 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

- Reordenar las filas de manera que aquellas con todos sus elementos nulas (si las hay) estén al final de todas.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 1 & 7 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo (continuación)

- Observamos la primera columna que no es toda nula.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 1 & 7 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Reordenamos las filas otra vez, de manera que los ceros de esta columna estén debajo de los elementos no nulos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si la matriz ya es escalonada, hemos terminado.

Ejemplo (continuación)

- Si no, observamos el primer elemento que viola la condición de escalonamiento (lo llamamos **pivote**) y desde ahora olvidamos todas las filas de arriba.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Repetimos el paso previo (ignorando las filas superiores que ya han sido tratadas). Si la matriz ya es escalonada, se termina el proceso.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 5 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo (continuación)

- Si no, eliminamos todos los números no nulos que estén en la misma columna del elemento pivote (sea éste a_{ij}) y por debajo de él sumamos múltiplos de la fila i a los múltiplos de las filas de abajo:

$$3 \cdot \text{fila 3} - 5 \cdot \text{fila 2} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 7 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 15 - 15 & 0 - 10 & 12 - 25 & 21 - 35 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$
$$= \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 7 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -10 & -13 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- Si la matriz ya es escalonada, hemos terminado. Si no, se repiten las operaciones con las filas que todavía no están en forma escalonada, hasta que lo estén.

Determinantes

- Sea A un matriz 2×2 . Entonces, el determinante es definido como

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

- Sea A una matriz 3×3 . Regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} \\ - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Determinantes

- En general, podemos escribir el desarrollo del determinante de una matriz A por la fila i como,

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{im}A_{im}$$

o por la columna j ,

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

donde,

- El **menor** complementario del elemento a_{ij} de A es el determinante de la $(n-1) \times (n-1)$ submatriz que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j de la matriz A .
- El **adjunto** A_{ij} del elemento a_{ij} de A es el menor complementario de a_{ij} multiplicado por el factor $(-1)^{i+j}$.

Ejemplo

- Si queremos desarrollar el determinante por la columna 2,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}2 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ + (-1)^{2+3}1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \\ = -2 \cdot (-3) + 3 \cdot (0) - (1) \cdot 1 = 5$$

- Si lo desarrollamos por la columna 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} \\ + (-1)^{3+3}3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Propiedades de los Determinantes

- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.
- Si todos los elementos de una fila o columna de una matriz son iguales a cero, entonces el determinante es nulo.
- Si multiplicamos una fila o columna de una matriz por un número, entonces el determinante queda multiplicado por dicho número.
- Si permutamos dos filas (o dos columnas) el determinante cambia de signo.
- Si añadimos a una fila (o columna) otra fila (o columna) multiplicada por un número, el determinante no cambia.
- Si dos filas o columnas son iguales, entonces el determinante es igual a 0.

Aplicaciones

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -7 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -7 \\ -5 & -5 & -10 \\ 1 & -1 & -7 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ -5 & -5 & -10 \\ 1 & -1 & -7 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 25 \\ 0 & -2 & -14 \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -14 \\ 0 & 0 & 25 \end{vmatrix} = -50 \end{aligned}$$

Rango de una Matriz

- La forma escalonada por el método anterior no es única. Esto es, cuando aplicamos el método, la matriz final obtenida depende de los pasos seguidos. En cualquier caso, se puede probar que el número de filas nulas es independiente del procedimiento usado para obtener la forma escalonada.
- **rango de A** es el número de filas no nulas que tiene la matriz en cualquiera de sus formas escalonadas.
- El rango de dos matrices equivalentes es el mismo.

Rango de una Matriz. Ejemplo.

- Considérese la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 1 & 7 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

- Es equivalente a la matriz escalonada:

$$= \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -10 & -13 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que $\text{rango}(A) = 4$.

Rango de una Matriz. Otra definición.

- El rango de A es la dimensión del mayor determinante no nulo que podemos construir dentro de la matriz original eliminando filas y columnas.
- **Ejemplo.** Sea

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

El rango de esta matriz no puede ser mayor que 2 ya que es imposible construir una matriz 3×3 . Veamos si puede construirse una matriz 2×2 con determinante no nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

no funciona

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Dado que el determinante no es igual a cero, el rango de esta matriz es 2.

Rango de una Matriz. Ejemplo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

entonces, como antes, el rango no puede ser mayor que 2. Tampoco puede ser menor que 1, dado que en ese caso sería la matriz nula.

Veamos que en este caso, el rango es 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

Así pues, el rango es 1.

Matriz Inversa

- Dada una matriz A $n \times n$, tiene inversa si existe otra matriz $n \times n$, que denotaremos como A^{-1} , tal que $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$.
- Una matriz cuadrada tiene inversa si y sólo si su determinante es distinto de cero.
- Una matriz cuadrada tiene inversa si y sólo si su rango es n
- Si existe la matriz inversa, ésta es única.
- Si A tiene inversa, entonces $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.
- Cuando existen, $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

El método de Gauss-Jordan para calcular la inversa de una matriz.

- Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Construimos la nueva matriz

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right)$$

El método de Gauss-Jordan para calcular la inversa de una matriz.

- Para esta matriz, aplicamos *operaciones elementales* hasta que la parte izquierda de la matriz sea la identidad. Puede observarse que esto se conseguirá si la matriz original tiene rango máximo, en este caso, obtenemos

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array} \right)$$

y la matriz de la derecha será la inversa de A .

El método de Gauss-Jordan para calcular inversas. Ejemplo.

- Sea $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Construimos la matriz: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$.

- Hacemos las siguientes operaciones

$$\begin{aligned} (f_3 - f_1) &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) (f_3 + f_2) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

El método de Gauss-Jordan para calcular inversas. Ejemplo.

- En este punto podemos ver que el rango de la matriz es 3, así que puede invertirse

$$(2f_2 - f_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) (2f_1 - f_2)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

- Finalmente, dividiendo por 2

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array} \right).$$

- La matriz inversa será: $A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array} \right).$

Una fórmula para calcular la inversa de una matriz.

- Para una matriz cuadrada A , su matriz adjunta ($\text{Adj}(A)$) es la matriz de adjuntos de A . Esto es, un elemento en la fila $i^{\text{ésima}}$ y en la columna $j^{\text{ésima}}$ de $\text{Adj}(A)$, es A_{ij} .
- Si $|A| \neq 0$, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t$$

Ejemplo

- Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
- $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.
- $\text{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
- $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.