

Sesión 9

Matemáticas para la Economía II

Capítulo 4: Derivadas de Orden Superior. Parte II: Aproximaciones de Taylor. Formas Cuadráticas

Grados en Administración de Empresas, Finanzas y Contabilidad, Empresa y Tecnología, Estudios Internacionales y Administración de Empresas y Derecho y Administración de Empresas

Universidad Carlos III de Madrid

Polinomio de Taylor de primer orden.

- Sea $f \in C^1(D)$, $p \in D$. El polinomio de Taylor de primer orden en el punto p es

$$P_1(x) = f(p) + \nabla f(p) \cdot (x - p)$$

- Si $f(x, y)$ es una función de dos variables y $p = (a, b)$, entonces el polinomio de Taylor de primer orden para la función f alrededor del punto $p = (a, b)$ es el polinomio

$$P_1(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot (y - b)$$

- $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - P_1(x)}{\|x - p\|} = 0.$

Polinomio de Taylor de segundo orden.

- Sea $f \in C^2(D)$, $p \in D$. El polinomio de Taylor de segundo orden en el punto p es

$$P_2(x) = f(p) + \nabla f(p) \cdot (x - p) + \frac{1}{2}(x - p) H f(p)(x - p)$$

- Si $f(x, y)$ es una función de dos variables y $p = (a, b)$, entonces el polinomio de Taylor de orden dos de la función f alrededor del punto $p = (a, b)$ es el polinomio

$$P_2(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x - a)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x - a)(y - b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(y - b)^2 \right)$$

- $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - P_2(x)}{\|x - p\|^2} = 0$.

Ejemplo.

- Sea $f(x, y) = x^3y - xy + 2x + 2y^2 - 15y + 1$ y $p = (-1, 1)$.
- Calculamos el gradiente y la matriz Hessiana para la función f en el punto p .
- Tenemos

$$\nabla f(x, y) = (3x^2y - y + 2, x^3 - x + 4y - 15)$$

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 6xy & 3x^2 - 1 \\ 3x^2 - 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- Por tanto,

$$\nabla f(-1, 1) = (4, -11)$$

$$Hf(-1, 1) = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejemplo.

- El polinomio de Taylor de primer orden de la función f en el punto p es

$$\begin{aligned}P_1(x, y) &= f(-1, 1) + \nabla f(p) \cdot (x+1, y-1) = -14 + (4, -11) \cdot (x+1, y-1) \\ &= -14 + 4(1+x) - 11(-1+y)\end{aligned}$$

- El polinomio de Taylor de segundo orden de la función f en el punto p es

$$\begin{aligned}P_2(x, y) &= f(-1, 1) + \nabla f(p) \cdot (x+1, y-1) + \\ &\quad \frac{1}{2}(x+1, y-1) H f(-1, 1) \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix} = \\ &= -14 + (4, -11) \cdot (x+1, y-1) + \\ &\quad \frac{1}{2}(-6(x+1)^2 + 4(x+1)(y-1) + 4(y-1)^2) \\ &= -3x^2 + 2xy - 4x + 2y^2 - 13y - 2\end{aligned}$$

Formas Cuadráticas.

- Una **forma cuadrática** de orden n es una función $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$$

para algunos números reales $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $i, j = 1, \dots, n$

- $Q(x, y, z) = x^2 - 2xy + 4xz + 6yz + 5z^2$.
- En notación matricial,

$$\begin{aligned} Q(x, y, z) &= (x \quad y \quad z) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \\ &= x^2 - 2xy + 4xz + 6yz + 5z^2 \end{aligned}$$

- Hay una única manera de asociar a la forma cuadrática una matriz simétrica.

- Cada forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, puede escribirse de manera única $Q(x) = xAx^t$ siendo $A = A^t$ una matriz simétrica.
- Observemos que la matriz simétrica

$$A = (a_{ij})$$

está asociada con la forma cuadrática

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_i x_j$$

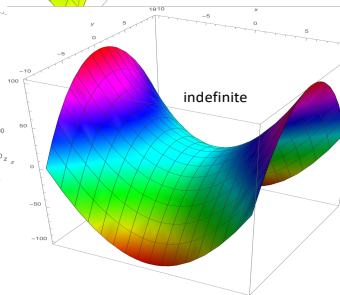
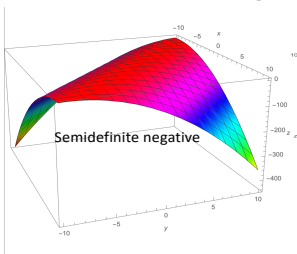
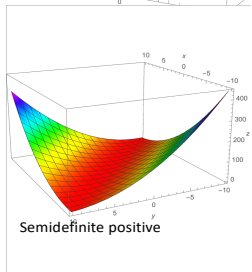
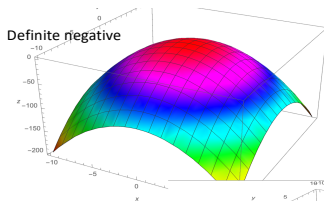
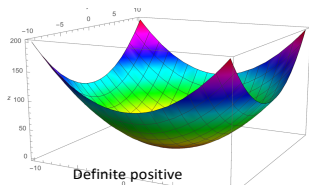
- Identificaremos la forma cuadrática $Q(x) = xAx^t$ con la matriz A .

Clasificación de formas cuadráticas.

Una forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es

- 1 **Definida positiva** si $Q(x) > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.
- 2 **Definida Negativa** si $Q(x) < 0$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.
- 3 **Semidefinida positiva** si $Q(x) \geq 0$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y $Q(x) = 0$ para algún $x \neq 0$.
- 4 **Semidefinida negativa** si $Q(x) \leq 0$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y $Q(x) = 0$ para algún $x \neq 0$.
- 5 **Indefinida** si existe al menos dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $Q(x) > 0$ y $Q(y) < 0$.

Clasificación de las formas cuadráticas.



Ejemplos.

- $Q_1(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2$ es definida positiva.
- $Q_2(x, y, z) = -2x^2 - y^2$ es semidefinida negativa.
- $Q_3(x, y) = -2x^2 - y^2$ es definida negativa.
- $Q_4(x, y, z) = x^2 - y^2 + 3z^2$ es indefinida.
- Las formas cuadráticas previas son fáciles de clasificar porque son diagonales, i.e.

$$Q_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Q_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad Q_4 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Clasificación de formas cuadráticas diagonales.

Proposición

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$. Entonces, la

forma cuadrática $Q(x) = xAx^t = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$ es

- 1 definida positiva si y sólo si $\lambda_i > 0$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$;
- 2 definida negativa si y sólo si $\lambda_i < 0$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$;
- 3 semidefinida positiva si y sólo si $\lambda_i \geq 0$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$ y $\lambda_k = 0$ para algún $k = 1, 2, \dots, n$;
- 4 semidefinida negativa si y sólo si $\lambda_i \leq 0$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$ y $\lambda_k = 0$ para algún $k = 1, 2, \dots, n$;
- 5 indefinida si y sólo si hay algún $\lambda_i > 0$ y algún $\lambda_j < 0$.

Método de los menores principales. $|A| \neq 0$

- Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ una matriz simétrica.

- Los menores principales son

$$D_1 = a_{11}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad D_n = |A|$$

- Supongamos que $|A| \neq 0$. Entonces,
 - 1 A es definida positiva si y sólo si $D_i > 0$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$;
 - 2 A es definida negativa si y sólo si $(-1)^i D_i > 0$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$;
 - 3 si ni (1) ni (2) se cumplen, entonces Q es indefinida.

Ejemplo.

- Consideremos la forma cuadrática

$$Q(x, y, z) = x^2 + 2xy - 2xz - 2y^2 + 4yz + 3z^2.$$

- La matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- $D_1 = 2 > 0$, $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 < 0$.
- La forma cuadrática es indefinida.

Ejemplo.

- Consideremos la forma cuadrática
 $Q(x, y, z) = 2x^2 + 2xy + y^2 + 2yz + 3z^2.$
- La matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- $D_1 = 2 > 0$, $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$, $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 > 0.$
- La forma cuadrática es definida positiva.

Ejemplo.

- Consideremos la forma cuadrática

$$Q(x, y, z) = -2x^2 + 2xy - 3y^2 + 2yz - z^2.$$

- La matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- $D_1 = -2 < 0$, $D_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 5 > 0$,

$$D_3 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 < 0.$$

- La forma cuadrática es definida negativa.

Menores principales. $|A| = 0$

Proposición

Sea $Q(x) = xAx^t$ con A simétrica y supongamos que $D_n = 0$ y $D_1 \neq 0, D_2 \neq 0, \dots, D_{n-1} \neq 0$. Entonces A es

- 1 semidefinida positiva si y sólo si $D_1, D_2, \dots, D_{n-1} > 0$;
- 2 semidefinida negativa si y sólo si $D_1 < 0, D_2 > 0, \dots, (-1)^{n-1} D_{n-1} > 0$;
- 3 e indefinida en otro caso.

- **Ejemplo:** Sea $Q(x, y) = x^2 + 4xy + 4y^2$. La matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

- $D_1 = 1 > 0, D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$.

- La forma cuadrática es semidefinida positiva.

Otros casos.

- Consideremos la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Observemos que $D_1 = 1$, $D_2 = D_3 = 0$. Nuestro método anterior no es aplicable.

- La forma cuadrática asociada es semidefinida positiva si y sólo si $a \geq 0$ e indefinida si $a < 0$.
- Si intercambiamos las variables y y z entonces la matriz asociada se convierte en

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ahora sí podemos aplicar la proposición anterior.

Menores principales.

- Un menor central de orden k es el determinante de la submatriz obtenida borrando **las mismas $n - k$ filas y columnas.**

Menores Centrales. Ejemplo

Consideremos la matriz 3×3 siguiente

$$A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- 1 Los menores centrales de orden 1×1 de A son:
 - ▶ a_{11} (que se obtiene eliminando las filas y columnas 2 y 3).
 - ▶ a_{22} (que se obtiene eliminando las filas y columnas 1 y 3); and
 - ▶ a_{33} (que se obtiene eliminando las filas y columnas 1 y 2).
- 2 Los menores centrales de orden 2×2 de A son:
 - ▶ $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$, que se obtiene eliminando la fila y columna 1.
 - ▶ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}$, que se obtiene eliminando la fila y columna 2; and
 - ▶ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, que se obtiene eliminando la fila y columna 3.
- 3 El único menor central de orden 3×3 de A es $|A|$.

Menores Centrales. Ejemplo

Las posibles cadenas de menores centrales son:

$$\textcircled{1} D_1 = a_{11}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}, D_3 = |A|.$$

$$\textcircled{2} D_1 = a_{11}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_3 = |A|.$$

$$\textcircled{3} D_1 = a_{22}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, D_3 = |A|.$$

$$\textcircled{4} D_1 = a_{22}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_3 = |A|.$$

$$\textcircled{5} D_1 = a_{33}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, D_3 = |A|.$$

$$\textcircled{6} D_1 = a_{33}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}, D_3 = |A|.$$

Proposición

La proposición se mantiene cierta si reemplazamos la cadena de menores principales por otras cadenas consistentes en menores principales centrados.

Ejemplo.

Ejemplo

Consideremos $Q(x, y, z) = x^2 - 2xy - 2xz + y^2 + 2yz + 2z^2$. La matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Tenemos $D_2 = D_3 = 0$. Consideramos la cadena de menores centrales

① $(1, 2), D_1 = 2$.

② $(1), D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$.

③ $D_3 = |A| = 0$.

Por lo tanto, la forma cuadrática asociada es semidefinida positiva.

Ejemplo.

Ejemplo

Consideremos $Q(x, y, z) = x^2 - 2xy - 2xz + y^2 + 2yz$. La matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos $D_2 = D_3 = 0$. Consideramos la cadena de menores centrales

- 1 $(2, 3)$, $D_1 = 1$.
- 2 (2) , $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$.
- 3 $D_3 = |A| = 0$.

Por lo tanto, la forma cuadrática asociada es indefinida.

Nota.

- Los métodos explicados son especialmente útiles para matrices simétricas 2×2 .
- Por ejemplo si A es una matriz 2×2 y $|A| < 0$, entonces la forma cuadrática asociada es indefinida.
- ¿Por qué?