Sesión 7
Matemáticas para la Economía II

Capítulo 3: Derivadas Parciales y Diferenciabilidad. Parte II

Grados en Administración de Empresas, Finanzas y Contabilidad, Empresa y Tecnología, Estudios Internacionales y Administración de Empresas y Derecho y Administración de Empresas

Universidad Carlos III de Madrid

La Matriz Jacobiana.

- La matriz jacobiana de f en el punto p es la matriz $m \times n$

$$\mathrm{D}\, f(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(p)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(p)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(p)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(p)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(p)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(p)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(p)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(p)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m(p)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

- Ejemplos.
- Para $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ¿cuál es la diferencia entre $\mathrm{D}\, f(p)$ y $\nabla f(p)$?

La regla de la cadena.

Teorema (La regla de la cadena)

Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *y* $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$*. Supongamos que* g *es diferenciable en* $p \in \mathbb{R}^n$ *y que* f *es diferenciable en* $g(p) \in \mathbb{R}^m$*. Entonces, la función* $f \circ g$ *es diferenciable en el punto* p *y*

$$\mathrm{D}(f \circ g)(p) = \mathrm{D}\, f(g(p))\, \mathrm{D}\, g(p)$$

- La expresión $\mathrm{D}(f \circ g)(p) = \mathrm{D}\, f(g(p))\, \mathrm{D}\, g(p)$ consiste en el producto de 2 matrices.

Ejemplo de la Regla de la Cadena.

- Sea $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\sigma(t) = (x(t), y(t))$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Entonces, la regla de la cadena dice

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) &= \mathrm{D}(f \circ \sigma)(t) = \mathrm{D}\, f(x, y)\big|_{\substack{x=x(t)\\ y=y(t)}} \mathrm{D}\, \sigma(t) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}\Big|_{\substack{x=x(t)\\ y=y(t)}} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) y'(t)
\end{aligned}$$

- En general, si $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t), \ldots, \sigma_n(t))$, tenemos $\frac{d}{dt} f(\sigma(t)) = \nabla f(\sigma(t)) \cdot \frac{d\sigma}{dt}$
- **Ejemplo:** $f(x, y = xy + y^2$, $x(t) = e^t$, $y(t) = 2t + 1$. Entonces, $\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = x'(t) y(t) + x(t) y'(t) + 2y(t) y'(t) =$ $2te^t + 8t + 3e^t + 4$.

Caso especial de la regla de la cadena.

- $g(s,t) = (x(s,t), y(s,t)) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Entonces, $(f \circ g)(s,t) = f(g(s,t)) = f\,(x(s,t), y(s,t))$. La regla de la cadena dice que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial (f \circ g)}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial (f \circ g)}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \end{aligned}$$

Caso especial de la regla de la cadena.

- $g(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t)) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $f(x,y,z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Entonces, $(f \circ g)(s,t) = f(g(s,t)) = f\,(x(s,t), y(s,t), z(s,t))$. La regla de la cadena dice que,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial (f \circ g)}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \\
\frac{\partial (f \circ g)}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}
\end{aligned}
$$

Ejemplo.

- Sea $f(x,y,z) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x(u,v), y(u,v), z(u,v) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y,z) = x^2y + xz$$
$$x(u,v) = e^u, \quad y(u,v) = uv, \quad z(u,v) = \ln v$$
- Consideremos la composición $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(u,v) = f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$.
- Usaremos la regla de la cadena para calcular
$$\frac{\partial h}{\partial u}(0,1), \quad \frac{\partial h}{\partial v}(0,1)$$

Ejemplo.

- Primero, $x(0,1) = 1$, $y(0,1) = 0$, $z(0,1) = 0$.
- Tenemos, $Df(x,y,z) = \left(2xy + z, x^2, x\right)$.
- Así, $Df(1,0,0) = (0,1,1)$.
- Escribimos $g(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = (e^u, uv, \ln v)$.
- Entones,

$$Dg(u,v) = \begin{pmatrix} e^u & 0 \\ v & u \\ 0 & \frac{1}{v} \end{pmatrix}, \quad Dg(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo.

- Por la regla de la cadena,

$$\left(\frac{\partial h}{\partial u}(0,1) \quad \frac{\partial h}{\partial v}(0,1) \right) = Df(1,0,0)\, Dg(0,1) =$$

$$= (0,1,1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1,1)$$

- Así pues,

$$\frac{\partial h}{\partial u}(0,1) = 1 \quad \frac{\partial h}{\partial v}(0,1) = 1$$

- Repetimos el cálculo usando

$$\begin{aligned} \frac{\partial (f \circ g)}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial (f \circ g)}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} \end{aligned}$$

Ejemplo.

- Consideremos las funciones

$$f(u,v) = uv^2$$

y

$$u(x,y,z) = x + yz, \quad v(x,y,z) = yz - x$$

- Tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\
\frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \\
\frac{\partial h}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}
\end{aligned}$$

Ejemplo.

- Es decir,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x} &= v^2 + 2uv \times (-1) = 3x^2 - 2xyz - y^2 z^2 \\
\frac{\partial h}{\partial y} &= v^2 z + 2uvz = -x^2 z - 2xyz^2 + 3y^2 z^3 \\
\frac{\partial h}{\partial z} &= v^2 y + 2uvy = -x^2 y - 2xy^2 z + 3y^3 z^2
\end{aligned}$$

Ejemplo.

- Consideremos la función de producción Cobb-Douglas

$$f(K, L) = 5K^{1/3}L^{2/3}$$

- donde f es el número de unidades producidas, K es el capital y L es el trabajo.
- Supongamos que el capital y el trabajo son funciones del tiempo

$$K = K(t), \quad L = L(t)$$

- Entonces la producción

$$f(K(t), L(t))$$

  es también una función del tiempo.
- ¿Cómo cambia la producción en un instante determinado?

Ejemplo.

- Usando la regla de la cadena podemos expresar este cambio.

$$\begin{aligned}\frac{df(K(t),L(t))}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial K}\frac{dK}{dt}+\frac{\partial f}{\partial L}\frac{dL}{dt}\\ &= \frac{5}{3}K^{-2/3}L^{2/3}\frac{dK}{dt}+\frac{10}{3}K^{1/3}L^{-1/3}\frac{dL}{dt}\end{aligned}$$

Ejemplo.

- Supongamos que un agente tiene una función de utilidad diferenciable

$$u(x, y)$$

donde x es un bien de consumo e y es la contaminación ambiental.

- Entonces la utilidad del agente es creciente en x y decreciente en y,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &> 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &< 0 \end{aligned}$$

- Supongamos que para producir x unidades del bien se generan $y = f(x)$ unidades de contaminación,
- ¿Cuál es el nivel óptimo de consumo del bien x para el agente?

Ejemplo.

- La utilidad del agente cuando consume x del bien y se generan $y = f(x)$ unidades de contaminación es

$$u(x, f(x))$$

Por tanto el agente maximiza la función de utilidad anterior. La condición de primer orden es

$$\frac{du(x, f(x))}{dx} = 0$$

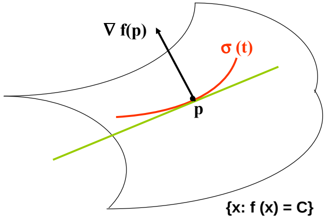
Por la regla de la cadena, vemos que la ecuación

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, f(x))f'(x)$$

determina el nivel óptimo del bien.

Gradiente y curvas de nivel.

- Consideremos la superficie de nivel $S_C = \{x \in D : f(x) = C\}$.
- Sea $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una curva diferenciable y supongamos que $\sigma(t) \in S_C$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Esto es $f(\sigma(t)) = c$ para cada $t \in \mathbb{R}$.
- Entonces, $0 = \frac{d}{dt} f(\sigma(t)) = \nabla f(\sigma(t)) \cdot \frac{d\sigma}{dt}$
- Por tanto, $\nabla f(\sigma(t))$ y $d\sigma(t)/dt$ son perependiculares para cada $t \in \mathbb{R}$.



- $\nabla f(\sigma(t))$ es perependicular a la superficie $S_C = \{x \in D : f(x) = C\}$.

Ejemplo.

- Consideremos la superficie deda por la ecuación $3x^2 + 2y^2 + 5z^2 = 56$.
- El gradiente de la función $f(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + 5z^2$ es $\nabla f(x, y, z) = (6x, 4y, 10z)$.
- En el punto $p = (-1, 2, -3)$ obtenemos $\nabla f(-1, 2, -3) = (-6, 8, -30)$.
- La ecuación del plano tangente es $-6(1 + x) + 8(-2 + y) - 30(3 + z) = 0$ o $-6x + 8y - 30z = 112$.
- Las ecuaciones paramétricas de la recta normal son $(x, y, z) = (-1, 2, -3) + t(-6, 8, -30)$.
- Esto es, $x = -1 - 6t$, $y = 2 + 8t$, $z = -3 - 30t$.

Plano tangente a la gráfica de una función.

- La gráfica de f es el conjunto $G = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.
- Definimos $g(x, y, z) = f(x, y) - z$. La gráfica de f puede ser escrita como $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\}$.
- Una ecuación para el plano tangente a G en el punto $p = (a, b)$ es

$$\nabla g(a, b, f(a, b)) \cdot ((x, y, z) - (a, b, f(a, b))) = 0$$

- Dado que, $\nabla g(a, b, f(a, b)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b), -1\right)$.
- Obtenemos

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot (y - b)$$

Polinomio de Taylor de Primer Orden.

- Definimos el polinomio de Taylor de primer orden de la función f en el punto $p = (a, b)$ como

$$P_1(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot (y - b)$$

- Entonces, f es diferenciable en el punto (a, b) si

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{|f(x, y) - P_1(x, y)|}{\|(x - a, y - b)\|} = 0$$

- Esto es, si el plano tangente es una 'buena' apoximación al valor de la función

$$f(x, y) \approx f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot (y - b)$$

Ejemplo.

- $f(x,y) = -2y + xy^3 - 2xy + 4x - y^2 + 1$ y $p = (-1,1)$. Calculemos la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función f en el punto $(p, f(p))$.
- La ecuación del plano tangente es

$$\begin{aligned} z = f(-1,1) + \nabla f(p) \cdot (x+1, y-1) = \\ = -5 + (3,-5) \cdot (x+1, y-1) = \\ = -5 + 3(x+1) - 5(y-1) \end{aligned}$$

- Coincide con el polinomio de Taylor de primer orden de f en p.