

Sesión 6

Matemáticas para la Economía II

Capítulo 3: Derivadas Parciales y Diferenciación. Parte I

Grados en Administración de Empresas, Finanzas y Contabilidad, Empresa y Tecnología, Estudios Internacionales y Administración de Empresas y Derecho y Administración de Empresas.

Universidad Carlos III de Madrid

Derivadas Parciales.

- En este capítulo, D denotará un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y sea $p \in D$.
- Las derivadas parciales de $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ con respecto a la i -ésima variable en el punto p son el límite (si existe)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + te_i) - f(p)}{t} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(p + te_i)$$

donde $e_i = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1 \text{ términos}}, i, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-i \text{ términos}})$.

- En \mathbb{R}^2 , $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$.
- En \mathbb{R}^3 , $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

Derivadas Parciales.

- Para $n = 2$, $p = (x, y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x + t, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x, y + t)$$

- Para $n = 3$, $p = (x, y, z)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x + t, y, z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x, y + t, z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x, y, z + t)$$

Derivadas Parciales.

- Hacer algunos ejemplos de derivadas
- $f = x^2y + y^3z$.
- $f = e^{xy^2}$
- etc.

Gradiente.

- El **gradiente** de f en p es $\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \frac{\partial f}{\partial x_2}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right)$.
Asumiendo que todas las derivadas parciales existen.
- $f = x^2y + y^3z$, Calcula $\nabla f(1, -1, 2)$.
- $f = e^{xy^2}$, Calcula $\nabla f(-1, 1)$.

Diferenciabilidad.

- f es diferenciable en p si $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(p+v) - f(p) - \nabla f(p) \cdot v}{\|v\|} = 0$.
- $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en p si cada una de las funciones $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ es diferenciable en p .

Proposición

Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $p \in D$, entonces f es continua en ese punto.

Ejemplo.

Consideremos la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- Vamos a demostrar que f no es diferenciable en el punto $p = (0, 0)$.
- Primero, calculamos $\nabla f(0, 0)$. Observemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t^3} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t^3} = 0 \end{aligned}$$

por lo que $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$.

Ejemplo.

- Entonces, f es diferenciable en el punto $p = (0, 0)$ si y sólo si

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(p + v) - f(p) - \nabla f(p) \cdot v}{\|v\|} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f((0,0) + (x,y)) - f(0,0) - \nabla f(p) \cdot (x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - (0,0) \cdot (x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Ejemplo.

- Vamos a probar que este límite no existe. Consideramos la función

$$g(x, y) = \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

- Observamos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{(2t^2)^{3/2}} = 0$$

- Además,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t, t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^3}{(2t^2)^{3/2}} = \frac{1}{2^{3/2}} \neq 0$$

- por lo que el límite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

no existe y concluimos que f no es diferenciable en el punto $(0, 0)$.

Ejemplo.

Consideremos la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- Vamos a demostrar que f es diferenciable en el punto $p = (0, 0)$.
- Primero, calculamos $\nabla f(0, 0)$. Observamos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t^3} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t^3} = 0 \end{aligned}$$

- y obtenemos que $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$.

- Usamos la notación $v = (x, y)$,
- f es diferenciable en el punto $p = (0, 0)$ si y sólo si

$$\begin{aligned}
 0 &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(p + v) - f(p) - \nabla f(p) \cdot v}{\|v\|} \\
 &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f((0, 0) + (x, y)) - f(0, 0) - \nabla f(p) \cdot (x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\
 &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - (0, 0) \cdot (x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\
 &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\
 &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}
 \end{aligned}$$

- En el Teorema del emparejado elegimos $g(x, y) = 0$, $h(x, y) = |y|$. Como, h es continua, vemos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x, y) = 0$.
- Para $(x, y) \neq (0, 0)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{xy^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right| &= \frac{|x| y^2 |y|}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{\sqrt{x^2} y^2 |y|}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\
 &\leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2} (x^2 + y^2) |y|}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{(x^2 + y^2)^{3/2} |y|}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\
 &= |y|
 \end{aligned}$$

- por lo tanto,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0$$

- y la función es diferenciable en el punto $(0,0)$.

Diferenciabilidad.

Teorema

Supongamos que hay un $r > 0$ tal que las derivadas parciales, $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ existen en cada punto de la bola abierta $B(p, r)$ y son funciones continuas en dicha bola. Entonces, la función f es diferenciable en p .

- Por ejemplo, $f(x, y, z) = xe^{yz} + y^2$ es diferenciable en cualquier punto (x, y) .
- f está en la clase C^1 de D si todas las derivadas parciales de f existen y son funciones continuas en D . Escribimos $f \in C^1(D)$.

Derivadas direccionales.

- $D_v f(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t}$ es la derivada de f en p a lo largo (del vector) v .
- If $\|v\| = 1$, entonces $D_v f(p)$ es la derivada direccional de f en p en la dirección (del vector) v .
- $f(x, y) = xy$, $p = (1, -1)$, $v = (3, 4)$. Entonces, $p + tv = (1 + 3t, -1 + 4t)$ y

$$\begin{aligned} D_v f(p) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1 + 3t, -1 + 4t) - f(1, -1)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 + 3t)(-1 + 4t) + 1}{t} = 1 \end{aligned}$$

- Y, dado que $\|v\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, la derivada direccional de f en p en la dirección de v es $\frac{1}{\|v\|} D_v f(p) = \frac{1}{5}$.

Derivadas direccionales y gradiente.

• Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $p \in D$, entonces $D_v f(p) = \nabla f(p) \cdot v$.

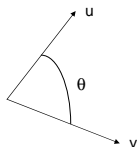
• Sea $f(x, y) = xy$, $p = (1, -1)$, $v = (3, 4)$. Entonces,

$$\nabla f(p) = (y, x) \Big|_{\substack{x=1 \\ y=-1}} = (-1, 1)$$

$$D_v f(p) = \nabla f(p) \cdot v = (-1, 1) \cdot (3, 4) = -3 + 4 = 1.$$

Interpretación del gradiente.

- $D_v f(p) = \nabla f(p) \cdot v = \|\nabla f(p)\| \|v\| \cos \theta$, donde



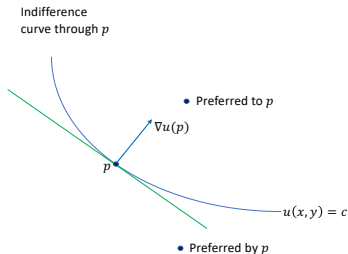
- Supongamos que $\|v\| = 1$. Entonces, $D_v f(p)$
 - ▶ alcanza un máximo cuando $\theta = 0$, esto es, cuando los vectores $\nabla f(p)$ y v tienen la misma dirección.
 - ▶ alcanza un mínimo cuando $\theta = \pi$, esto es, cuando los vectores $\nabla f(p)$ y v son paralelos y opuestos.
 - ▶ es cero cuando $\theta = \pi/2$ o $\theta = 3\pi/2$, es decir, cuando los vectores $\nabla f(p)$ y v son perpendiculares.

Interpretación del gradiente.

- Si tenemos una curva derivable $\sigma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ tal que $\sigma'(t) \cdot \nabla f(\sigma(t)) > 0$ para $t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$, entonces la función $f(\sigma(t))$ es creciente en el intervalo (a, b) .
- Si tenemos una curva derivable $\sigma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ tal que $\sigma'(t) \cdot \nabla f(\sigma(t)) < 0$ para $t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$, entonces la función $f(\sigma(t))$ es decreciente en el intervalo (a, b) .
- Si tenemos una curva derivable $\sigma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ tal que $\sigma'(t)$ es perpendicular a $\nabla f(\sigma(t))$ para $t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$, entonces la función $f(\sigma(t))$ permanece constante en el intervalo (a, b) .
- El valor máximo de $D_v f(p)$ para $\|v\| = 1$ se alcanza cuando v apunta en la dirección de $\nabla f(p)$.
- El valor mínimo de $D_v f(p)$ para $\|v\| = 1$ se alcanza cuando v apunta en la dirección opuesta a $\nabla f(p)$.

Ejemplo

- Considere un consumidor con una función de utilidad u . Entonces,
 - 1 El gradiente $\nabla u(p)$ apunta hacia las cestas de bienes que son preferidas a p .
 - 2 El gradiente $\nabla u(p)$ es perpendicular a la recta tangente a la curva de indiferencia que pasa por p .



Ejemplo

- Considere la función $f(x, y, z) = 8x^2 + 4xz + 8x + y^4 + 32y + z^2 + 16$ definida en \mathbb{R}^3 .
- Calculamos $D_v f(-1, 0, 1)$ para $v = (2, 1, -1)$.
- Tenemos que

$$\nabla f(x, y, z) = (16x + 4z + 8, 4y^3 + 32, 4x + 2z)$$

- Dado que $\nabla f(-1, 0, 1) = (-4, 32, -2)$,
- obtenemos $D_v f(-1, 0, 1) = (-4, 32, -2) \cdot (2, 1, -1) = 26$.

Ejemplo

- Considere la función $f(x, y, z) = ye^{xz} - x^2 - yz^2$, definida en \mathbb{R}^3 , y el vector $v = (a, b, c)$.
- Calculamos el gradiente de f en el punto $p = (0, 1, 1)$ y determinamos para qué valores de a, b, c se cumple que $D_v f(p) = 0$.
- Tenemos que

$$\nabla f(x, y, z) = (yze^{xz} - 2x, e^{xz} - z^2, xye^{xz} - 2yz)$$

- Por lo tanto,

$$\nabla f(0, 1, 1) = (1, 0, -2)$$

- Entonces,

$$D_v f(p) = \nabla f(p) \cdot v = (1, 0, -2) \cdot (a, b, c) = a - 2c$$

- Y $D_v f(p) = 0$ si y solo si $v = (2c, b, c)$, con $b, c \in \mathbb{R}$ arbitrarios.

Ejemplo

- Considere la función $f(x, y) = x^2 + y^2$, definida en \mathbb{R}^2 , y la curva de nivel S dada por $x^2 + y^2 = 5$. Vamos a calcular la recta tangente en el punto $p = (1, 2) \in S$.
- $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$, $\nabla f(1, 2) = (2, 4)$
- La ecuación de la recta tangente a la curva $x^2 + y^2 = 5$ en el punto $p = (1, 2) \in S$ viene dada por:

$$(2, 4) \cdot (x - 1, y - 2) = 0$$

es decir,

$$x + 2y = 5$$

Ejemplo

