

# Session 5

## Matemáticas para la Economía II

### Funciones continuas en varias variables

Grados en Administración de Empresas, Finanzas y Contabilidad, Empresa y Tecnología, Estudios Internacionales y Administración de Empresas y Derecho y Administración de Empresas.

Universidad Carlos III de Madrid

## Funciones Continuas.

- Una función  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es **continua** en un punto  $p \in D$  si  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$ .
- Diremos que  $f$  es continua en  $D$  si lo es en todos los puntos  $p \in D$ .
- La función  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$  es continua en  $p \in D$  si y sólo si para cada  $i = 1, \dots, m$ , las funciones  $f_i$  son continuas en  $p$ .
- Nos centramos en las funciones  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

# Ejemplos de Funciones Continuas.

Las siguientes funciones son continuas,

- Polinomios
- Funciones trigonométricas y exponenciales.
- Logaritmos en su dominio de definición.
- Potencias de funciones, en el dominio donde estén definidas.
- Combinación algebraica de las funciones anteriores.

## Ejemplos de Funciones Continuas.

### Teorema

Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  y sea  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua en el punto  $p$  de  $D$ .  
Entonces,

- 1  $f + g$  es continua en  $p$ .
- 2  $fg$  es continua en  $p$ .
- 3 si  $f(p) \neq 0$ , entonces hay algún conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $f(x) \neq 0$  para todo  $x \in U \cap D$  y

$$\frac{g}{f} : U \cap D \rightarrow \mathbb{R}$$

es continua en  $p$ .

### Teorema

Sea  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow E$  (donde  $E \subset \mathbb{R}^m$ ) es continua en  $p \in D$  y sea  $g : E \rightarrow \mathbb{R}^k$  una función continua en  $f(p)$ . Entonces,  $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}^k$  es continua en  $p$ .

# Continuidad de funciones y conjuntos abiertos y cerrados

## Teorema

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- 1  $f$  es continua en  $\mathbb{R}^n$ .
- 2 Para cada subconjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}$ , el conjunto  $f^{-1}(U) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in U\}$  es abierto.
- 3 Para cada subconjunto cerrado  $V \subset \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in V\}$  es cerrado.
- 4 Para cada  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , el conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^n : a \leq f(x) \leq b\}$  es cerrado.
- 5 Para cada  $a, b \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $f^{-1}(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n : a < f(x) < b\}$  es abierto.

# Continuidad de funciones y conjuntos abiertos y cerrados.

## Corolario

Supongamos que las funciones  $f_1, \dots, f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son continuas. Sea  $-\infty \leq a_i \leq b_i \leq +\infty$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Entonces,

- 1 El conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^n : a_i < f_i(x) < b_i, \quad i = 1, \dots, k\}$  es abierto.
- 2 El conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq f_i(x) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, k\}$  es cerrado.

## Funciones definidas a trozos. Ejemplo 1.

Considere la función

$$\begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{if } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

vamos a demostrar que es continua en  $\mathbb{R}^2$ .

- La función  $f$  es continua en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  porque en ese conjunto es un cociente de polinomios y el denominador no se anula en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .
- Para probar la continuidad en  $(0, 0)$  vamos a demostrar que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$ .
- En el Teorema del encaje, elegimos  $g(x, y) = 0$ ,  $h(x, y) = |x|$ .
- Las funciones  $g$  y  $h$  son continuas por lo que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = 0$  y  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x, y) = h(0, 0) = 0$ .

## Funciones definidas a trozos. Ejemplo 1.

- Sea  $(x, y) \neq (0, 0)$ , tenemos que,

$$|f(x, y)| = |x| \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq |x|$$

- Por el Teorema del encaje,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x, y)| = 0$ .
- Y, puesto que,  $-|f(x, y)| \leq f(x, y) \leq |f(x, y)|$ , aplicamos otra vez el Teorema del Encaje para concluir que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$$

- Por lo tanto,  $f$  es también continua en  $(0, 0)$ . La función  $f$  es continua en  $\mathbb{R}^2$ .

## Funciones definidas a trozos. Ejemplo 2.

Considere la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 \sqrt{|y|}}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

vamos a demostrar que es continua en  $\mathbb{R}^2$ .

- La función  $f$  es continua en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  porque en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$   $f$  es un cociente de funciones continuas y el denominador no se anula en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .
- Para probar la continuidad en  $(0, 0)$  vamos a demostrar que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$ .
- En el Teorema del encaje, elegimos  $g(x, y) = 0$ ,  $h(x, y) = \sqrt{|y|}$ .
- Las funciones  $g$  y  $h$  son continuas por lo que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = 0$  y  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x, y) = h(0, 0) = 0$ .

## Funciones definidas a trozos. Ejemplo 2.

- Sea  $(x, y) \neq (0, 0)$ , tenemos que,

$$|f(x, y)| = \frac{x^2 \sqrt{|y|}}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \sqrt{|y|} \leq \sqrt{|y|}$$

- Por el Teorema del encaje,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x, y)| = 0$ .
- Y, puesto que,  $-|f(x, y)| \leq f(x, y) \leq |f(x, y)|$ , aplicamos otra vez el Teorema del Encaje para concluir que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$$

- Por lo tanto,  $f$  es también continua en  $(0, 0)$ . La función  $f$  es continua en  $\mathbb{R}^2$ .

## Funciones definidas a trozos. Ejemplo 3.

Considere la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

vamos a demostrar que es continua en  $\mathbb{R}^2$ .

- La función  $f$  es continua en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  porque en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$   $f$  es un cociente de funciones continuas y el denominador no se anula en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .
- Para probar la continuidad en  $(0, 0)$  vamos a demostrar que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$ .
- En el Teorema del encaje, elegimos  $g(x, y) = 0$ ,  $h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ .
- Las funciones  $g$  y  $h$  son continuas por lo que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = 0$  y  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x, y) = h(0, 0) = 0$ .

## Funciones definidas a trozos. Ejemplo 3.

- Sea  $(x, y) \neq (0, 0)$ , tenemos que,

$$|f(x, y)| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}.$$

- Por el Teorema del encaje,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x, y)| = 0$ .
- Y, puesto que,  $-|f(x, y)| \leq f(x, y) \leq |f(x, y)|$ , aplicamos otra vez el Teorema del Encaje para concluir que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$$

- Por lo tanto,  $f$  es también continua en  $(0, 0)$ . La función  $f$  es continua en  $\mathbb{R}^2$ .

## Funciones definidas a trozos. Ejemplo 4.

Considere la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} e^{xy} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Determine el subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  donde la función  $f$  es continua.

- La función  $f$  es continua en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  porque en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$   $f$  es un cociente de funciones continuas y el denominador no se anula en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .
- Vamos a demostrar que  $f$  no es continua en  $(0, 0)$ .
- Consideremos la curva  $\alpha(t) = (t, t)$  obtenemos  $\lim_{t \rightarrow 0} f(\alpha(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{2t^2} e^{t^2} = \frac{1}{2}$ .
- Si usamos ahora la curva  $\sigma(t) = (t, t^2)$  vemos que  $\lim_{t \rightarrow 0} f(\sigma(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3}{t^2+t^4} e^{t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{1+t} e^{t^3} = 0$ .
- Por lo tanto, el límite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  no existe.
- La función  $f$  no es continua en el punto  $(0, 0)$ . La función  $f$  es continua en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

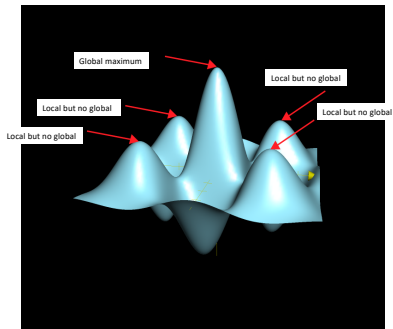
## Puntos extremos.

Sea  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Diremos que un punto  $p \in D$  es un

- **máximo global** de  $f$  en  $D$  si  $f(x) \leq f(p)$ , para cualquier otro  $x \in D$ .
- **mínimo global** de  $f$  en  $D$  si  $f(x) \geq f(p)$ , para cualquier otro  $x \in D$ .
- **máximo local** de  $f$  en  $D$  si hay algún  $\delta > 0$  tal que  $f(x) \leq f(p)$ , para todo  $x \in D \cap B(p, \delta)$ .
- **mínimo local** de  $f$  en  $D$  si hay algún  $\delta > 0$  tal que  $f(x) \geq f(p)$ , para cada  $x \in D \cap B(p, \delta)$ .

## Puntos extremos.

El punto  $A$  es un máximo local pero no global. El punto  $B$  es un máximo (local y) global.



# Teorema de Weierstrass

## Teorema

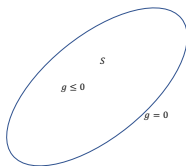
Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Entonces, existen  $x_0, x_1 \in D$  tales que para cualquier  $x \in D$

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$$

Esto es,  $x_0$  es un mínimo global de  $f$  en  $D$  y  $x_1$  es un máximo global de  $f$  en  $D$ .

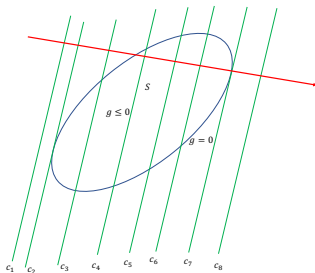
## Curvas de nivel y puntos extremos

- Utilizando las curvas de nivel, es posible encontrar los puntos extremos de una función  $f$  en un conjunto  $S$ .
- Lo explicamos en dos dimensiones.
- Sea  $f$  una función de dos variables.
- Sea  $S \subset \mathbb{R}^2$ .
- Queremos encontrar los valores máximo y mínimo de  $f$  en  $S$ .
- Supongamos  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) \leq 0\}$  y  $\partial S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ .



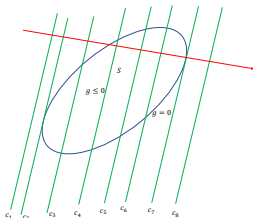
## Curvas de nivel y puntos extremos

- En verde tenemos las curvas de nivel de la función  $f$ . Por simplicidad, se representan como líneas rectas.
- La flecha roja indica la dirección de crecimiento de las curvas de nivel. Es decir,  $c_1 < c_2 < \dots < c_8$ .



## Curvas de nivel y puntos extremos

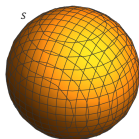
- Ni el valor máximo ni el mínimo se pueden alcanzar en una curva de nivel que intersecta a  $\partial S$  en dos puntos.
- Por ejemplo, moverse de un punto en el nivel de la curva  $c_5$  a un punto en el nivel de la curva  $c_6$  aumenta el valor de  $f$ . Y moverse de un punto en el nivel de la curva  $c_5$  a un punto en el nivel de la curva  $c_4$  disminuye el valor de  $f$ .



- El valor máximo es  $c_7$ . Se alcanza en un punto donde la curva de nivel es tangente a la curva  $g = 0$ .
- El valor mínimo es  $c_2$ . Se alcanza en un punto donde la curva de nivel es tangente a la curva  $g = 0$ .

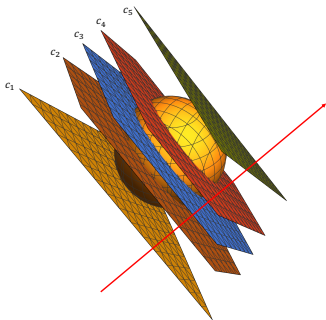
## Curvas de nivel y puntos extremos

- La misma idea funciona en cualquier dimensión. Por ejemplo, sea  $f$  una función de tres variables y  $S \subset \mathbb{R}^3$ .
- Queremos encontrar los valores máximo y mínimo de  $f$  en  $S$ .
- Supongamos  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) \leq 0\}$  y  $\partial S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\}$ . Tenga en cuenta que ahora  $\partial S$  es una superficie en  $\mathbb{R}^3$ .



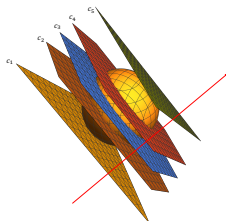
## Curvas de nivel y puntos extremos

- Para simplificar, las curvas de nivel de la función  $f$  se representan como planos en  $\mathbb{R}^3$ .
- La flecha roja indica la dirección de crecimiento de las curvas de nivel. Es decir,  $c_1 < c_2 < \dots < c_5$ .



## Curvas de nivel y puntos extremos

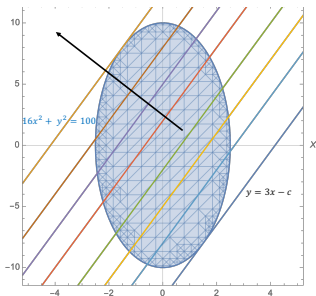
- Ni el valor máximo ni el mínimo se pueden alcanzar en una curva de nivel que intersecta a  $\partial S$  en una curva.
- Por ejemplo, moverse de un punto en el nivel de la curva  $c_3$  a un punto en el nivel de la curva  $c_4$  aumenta el valor de  $f$ . Y moverse de un punto en el nivel de la curva  $c_3$  a un punto en el nivel de la curva  $c_2$  disminuye el valor de  $f$ .



- El valor máximo es  $c_5$ . Se alcanza en un punto donde la curva de nivel es tangente a la superficie  $g = 0$ .
- El valor mínimo es  $c_1$ . Se alcanza en un punto donde la curva de nivel es tangente a la superficie  $g = 0$ .

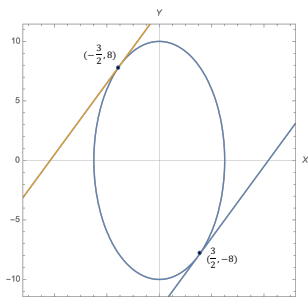
## Ejemplo 1

- Consideremos el conjunto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 16x^2 + y^2 \leq 100\}$  y la función  $f(x, y) = y - 3x$ .
- La función es continua y el conjunto  $A$  es cerrado. También es acotado, por tanto  $A$  es compacto.
- Así pues, la función  $f$  alcanza su máximo y su mínimo en  $A$ .
- Las curvas de nivel de  $f$  son líneas de la forma  $y = 3x + C$ .  
Graficamente,



## Ejemplo 1.

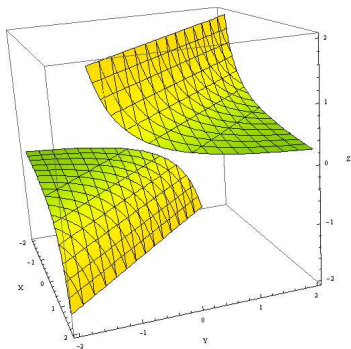
- El valor máximo y mínimo se alcanzan en el punto  $(x_0, y_0)$  donde la línea  $y = 3x + C$  es tangente a la gráfica de  $16x^2 + y^2 = 100$ .



- Se tiene que  $32x_0 + 2y_0y'(x_0) = 0$ ,  $y'(x_0) = 3$  y  $16x_0^2 + y_0^2 = 100$ .
- Obtenemos los puntos  $(-\frac{3}{2}, 8)$  (que corresponden a un máximo) y  $(\frac{3}{2}, -8)$  (que corresponden a un mínimo).
- El máximo valor que alcanza la función es  $\frac{25}{2}$ . El valor mínimo de la función es  $-\frac{25}{2}$ .

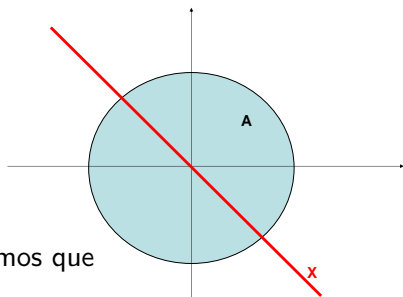
## Ejemplo 2

Consideremos el conjunto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$  y la función  $f(x, y) = \frac{1}{x+y}$ . La gráfica de  $f$  es



## Ejemplo 2

La función  $f$  es continua excepto en el conjunto  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$ . Este conjunto intersecta con  $A$ ,



Tomando  $y = 0$ , vemos que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x, 0) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x, 0) = -\infty$$

y concluimos que  $f$  no alcanza su máximo ni mínimo en  $A$ .

### Ejemplo 3.

Consideremos el conjunto  $B_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1, \quad x, y > 0\}$  y la función  $f(x, y) = \frac{1}{x+y}$ .

- La función  $f(x, y) = \frac{1}{x+y}$  es continua en  $B_1$ , porque si  $y = -x$ , entonces  $xy = -x^2 \leq 0$ .
- El conjunto  $B_1$  es cerrado pero no acotado. Por tanto, no es compacto.
- No podemos aplicar el teorema de Weierstrass.
- Por otro lado, podemos ver que  $f(x, y) > 0$  en el conjunto  $B_1$ .
- Resumiendo, los puntos  $(n, n)$  for  $n = 1, 2, \dots$  pertenecen al conjunto  $B_1$  y

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n, n) = 0$$

- Entonces, dado un punto  $p \in B_1$ , podemos encontrar un número natural  $n$  suficientemente grande tal que

$$f(p) > f(n, n) > 0$$

Concluimos que  $f$  no alcanza un mínimo en el conjunto  $B_1$ .

## Ejemplo 3

- Por otro lado, las curvas de nivel de la función son las líneas recta  $x + y = \frac{1}{c}$ .
- Gráficamente podemos ver que  $f$  alcanza un máximo en el punto de tangencia con el conjunto  $B_1$ . Este es el punto  $(1, 1)$ .

