

Sesión 3

Matemáticas para la Economía II

El espacio Euclídeo.

Grados en Administración de Empresas, Finanzas y Contabilidad, Empresa y Tecnología,
Estudios Internacionales y Administración de Empresas y Derecho y Administración de
Empresas

Universidad Carlos III de Madrid

Producto escalar en \mathbb{R}^n .

- Dados $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos su **producto escalar** como $x \cdot y = \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
- Por ejemplo, $(2, 1, 3) \cdot (-1, 0, 2) = -2 + 6 = 4$.
- **norma:** $\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, donde $x = (x_1, \dots, x_n)$.
- **Ejemplo:** $\|(-1, 0, 3)\| = \sqrt{10}$
- $\|x\|$ es la distancia desde x al origen. Es también la longitud del vector x .
- $\|x - y\|$ es la distancia entre x e y .
- El ángulo entre u y v es $\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}$.
- **Ejemplo:** $u = (a, a)$, con $a > 0$, $v = (0, 1)$. El ángulo entre u y v es $\pi/4$ (dibujo). Se tiene también que $\|u\| = \sqrt{2}a$, $\|v\| = 1$, $u \cdot v = a$. Es decir,

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Bolas abiertas y cerradas.

Sea $p \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$.

- La **bola abierta** de centro p y radio r es $B(p, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|p - y\| < r\}$.
- La **bola cerrada** de centro p y radio r es $\overline{B(p, r)} = \{y \in \mathbb{R}^n : \|p - y\| \leq r\}$.
- Para $n = 1$, tenemos que

$$B(p, r) = (p - r, p + r)$$

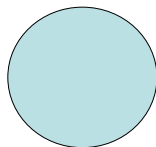
y

$$\overline{B(p, r)} = [p - r, p + r]$$

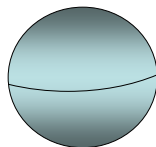


Bolas abiertas y cerradas.

- Para $n = 2, 3$ las bolas cerradas son



$n = 2$

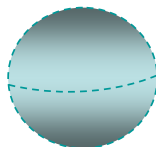


$n = 3$

- Para $n = 2, 3$ las bolas abiertas son



$n = 2$

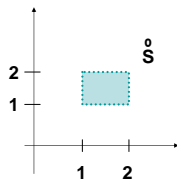
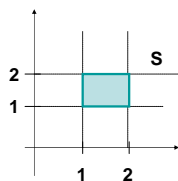


$n = 3$

Interior de un conjunto.

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$.

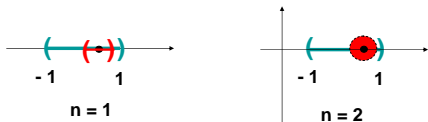
- $p \in \mathbb{R}^n$ está en el **interior** de S (y se escribe $p \in \overset{\circ}{S}$) si existe algún $r > 0$ tal que $B(p, r) \subset S$.
- $\overset{\circ}{S} \subset S$
- Sea $S = [1, 2] \times [1, 2] \subset \mathbb{R}^2$. Entonces, $\overset{\circ}{S} = (1, 2) \times (1, 2)$.



- $S = [-1, 1] \cup \{3\} \subset \mathbb{R}$. Entonces, $\overset{\circ}{S} = (-1, 1)$.

Conjuntos abiertos

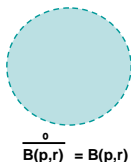
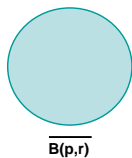
- Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es **abierto** si $S = \overset{\circ}{S}$
- La bola abierta $B(p, r)$ es un conjunto abierto.
- $S = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ es abierto, $T = (-1, 1] \subset \mathbb{R}$ no lo es.
- Pero $S = \{(x, 0) : -1 < x < 1\}$ no es abierto en \mathbb{R}^2 .



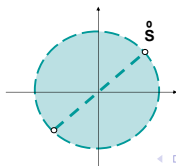
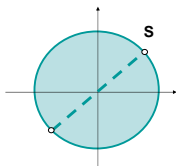
- $\overset{\circ}{S}$ es el conjunto abierto más grande contenido en S . (Esto es, $\overset{\circ}{S}$ es abierto, $\overset{\circ}{S} \subset S$ y si $A \subset S$ es abierto, entonces $A \subset \overset{\circ}{S}$).

Ejemplos.

- La bola cerrada $\overline{B(p,r)}$ no es un conjunto abierto, porque $\overset{\circ}{\overline{B(p,r)}} = B(p,r)$.



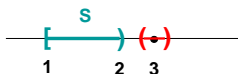
- $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \neq y\}$ no es abierto porque $\overset{\circ}{S} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, x \neq y\}$.



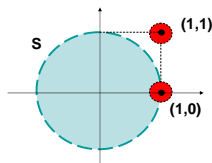
Clausura o adherencia

Let $S \subset \mathbb{R}^n$.

- $p \in \mathbb{R}^n$ está en la **clausura** de S (y escribimos $p \in \bar{S}$) si para todo $r > 0$ tenemos que $B(p, r) \cap S \neq \emptyset$.
- $S = [1, 2) \subset \mathbb{R}$. Entonces, $1, 2 \in \bar{S}$. Pero, $3 \notin \bar{S}$.



- $S = B((0, 0), 1) \subset \mathbb{R}^2$. Entonces, el punto $(1, 0) \in \bar{S}$. Pero, $(1, 1) \notin \bar{S}$.



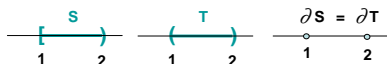
Conjuntos cerrados

- $F \subset \mathbb{R}^n$ es **cerrado** si $F = \bar{F}$.
- $[1, 2] \subset \mathbb{R}$ es cerrado. Pero, el conjunto $[1, 2) \subset \mathbb{R}$ no lo es.
- $\overline{B(p, r)}$ es cerrado. Pero, el conjunto $B(p, r)$ no lo es.
- $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \neq y\}$ no es cerrado.
- La clausura \bar{S} de S es el menor conjunto cerrado que contiene a S . (Esto es, \bar{S} es cerrado, $S \subset \bar{S}$ y si F es otro conjunto cerrado que contiene a S , entonces $\bar{S} \subset F$).

Frontera.

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$.

- $p \in \mathbb{R}^n$ es un **punto frontera** de S si para todo radio positivo $r > 0$, tenemos que,
 - 1 $B(p, r) \cap S \neq \emptyset$.
 - 2 $B(p, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus S) \neq \emptyset$.
- $\partial S =$ es el conjunto de los puntos frontera de S .
- $S = [1, 2)$, $T = (1, 2)$. Entonces, $\partial S = \partial T = \{1, 2\}$.

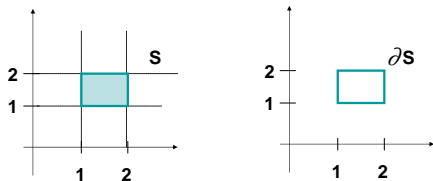


- $S = [-1, 1] \cup \{3\} \subset \mathbb{R}$. Entonces, $\partial S = \{-1, 1, 3\}$.

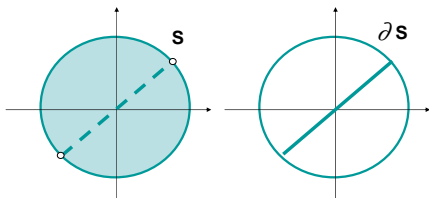


Ejemplos.

- $S \subset \mathbb{R}^2$, $S = [1, 2] \times [1, 2]$. Entonces, ∂S es



- $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \neq y\}$. Entonces,
 $\partial S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x = y\}$.



Notas útiles

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$, entonces

- $\overset{\circ}{S} = S \setminus \partial S$
- $\bar{S} = S \cup \partial S$
- $\partial S = \bar{S} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus S}$.
- Esto es, conociendo ∂S es fácil calcular $\overset{\circ}{S}$ y \bar{S} .

Conjuntos acotados.

- Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es **acotado** si existe algún $R > 0$ tal que $S \subset B(0, R)$.
- Dibujemos algunos ejemplos.
- Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es **compacto** si S es cerrado y acotado.
 $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \neq y\}$ no es compacto (es acotado, pero no cerrado).
- $B(p, R)$ no es compacto (es acotado, pero no cerrado).
- $\overline{B(p, R)}$ es compacto.
- $(0, 1]$ no es compacto. $[0, 1]$ es compacto.
- $[0, 1] \times [0, 1]$ es compacto.

Conjuntos convexos.

- Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es **convexo** si para todo $x, y \in S$ y $\lambda \in [0, 1]$ tenemos que $\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y \in S$.
- Dibujamos algunos ejemplos.
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \neq y\}$ no es un conjunto convexo.

