

## Session 2

# Matemáticas para la Economía II

Sistemas de Ecuaciones Lineales. El Teorema de Rouché-Frobenius.  
Resolución de Sistemas Lineales.

Grados en Administración de Empresas, Finanzas y Contabilidad, Empresa y Tecnología,  
Estudios Internacionales y Administración de Empresas y Derecho y Administración de  
Empresas

Universidad Carlos III de Madrid

# Sistemas de Ecuaciones Lineales.

- Un sistema de ecuaciones lineales es un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

donde  $a_{ij}$  y  $b_k$  son números reales conocidos y  $x_1, \dots, x_n$  son las incógnitas (o variables) del sistema.

- En notación matricial, 
$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$
- Ejemplos.

## Sistemas de Ecuaciones Lineales.

- Una solución del sistema lineal es un vector de números reales  $(x_1^*, \dots, x_n^*)$  que satisface todas las ecuaciones del sistema.
- Un sistema de ecuaciones lineales se llama **compatible** si tiene solución, en otro caso se llama **incompatible**.
- Si el sistema de ecuaciones lineales tiene múltiples soluciones (infinitas), se llama **indeterminado**.
- $$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 7 \end{cases}$$
 es incompatible.
- $$\begin{cases} x + y = 5 \\ 4y = 8 \end{cases}$$
 es compatible determinado. La única solución es el vector  $(3, 2)$ .
- $$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$$
 tiene infinitas soluciones:  $(x, 4 - x)$ . Diremos que es compatible indeterminado.

# El Teorema de Rouché-Frobenius

- Consideremos el sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \text{con } m \text{ ecuaciones y } n \text{ incógnitas.}$$

- Definimos la **matriz de coeficientes** como

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

- La **matriz ampliada** del sistema es

$$(A|b) = \left( \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

# El Teorema de Rouché-Frobenius.

## Teorema (Rouché-Frobenius)

- 1 El sistema será compatible si y sólo si  $\text{rango } A = \text{rango}(A|b)$ .
- 2 Supongamos que el sistema es compatible (Es decir,  $\text{rango } A = \text{rango}(A|b) \leq n$ ). Entonces,
  - 1 El sistema tiene una única solución si y sólo si  $\text{rango } A = \text{rango}(A|b) = n$ .
  - 2 El sistema es compatible indeterminado si  $\text{rango } A = \text{rango}(A|b) < n$ . En este caso, el número de parámetros necesario para describir las soluciones del sistema es  $n - \text{rango}(A)$ .

## Propiedad

Un sistema homogéneo (i.e., un sistema en el que la columna de términos independientes es nula) es siempre compatible (Tiene al menos la solución trivial  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ ).

## El Teorema de Rouché-Frobenius. Ejemplo

- Consideremos el sistema 
$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + y + 3z = 2 \\ 3x + 2y + 5z = 3 \end{cases}$$

- Su matriz ampliada es 
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 3 \end{array} \right)$$

- Calculamos el rango de  $A$  y de  $(A|b)$ : 
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 3 \end{array} \right) \sim$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

- Así pues, el rango de  $A$  y de  $(A|b)$  es 2. Por tanto, el sistema es compatible indeterminado.
- El número de parámetros es el número de variables  $- 2 = 1$ .

## Método de eliminación de Gauss-Jordan para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

- La idea es que, si los dos sistemas tiene matrices ampliadas equivalentes, tendrán las mismas soluciones.
- Si una matriz ya está en su forma escalonada es fácil calcular las soluciones del sistema.
- Por ejemplo, supongamos que la matriz ampliada es:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

- El sistema asociado tiene una única solución. ¿Por qué?
- Para encontrar la solución, la última fila nos da que  $2z = 4$ , así podemos sustituir  $z = 2$  en la segunda ecuación y tenemos que  $y + 8 = 2$ , de esta manera  $y = -6$ . Finalmente, sustituimos los dos valores en la primera para obtener  $x - 18 + 10 = 1$ . Por tanto,  $x = 9$ .

## Método de eliminación de Gauss-Jordan para resolver sistemas de ecuaciones. Otro ejemplo.

- Supongamos el sistema representado por la matriz:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- Este sistema es compatible indeterminado ya que el rango de  $A$  y el de la matriz ampliada es 2 y el número de incógnitas es 3. Así pues, tenemos un grado de libertad (un parámetro).
- La segunda ecuación es  $y + 4z = 2$ , que podemos reescribir como  $y = 2 - 4z$ .
- Sustituyendo ahora en la primera, obtenemos  $x + 3(2 - 4z) + 5z = 1$ , que significa que  $x = -5 + 7z$ .
- De esta manera, el conjunto de **todas** las soluciones de nuestro sistema es  $\{(7z - 5, 2 - 4z, z) : z \in \mathbb{R}\}$

## Método de eliminación de Gauss-Jordan para resolver sistemas de ecuaciones. Algunas notas.

- Algunas veces hay que tener cuidado con qué variables usamos como parámetros.

- Supongamos que la matriz ampliada es 
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- De la segunda ecuación,  $y = 1$ . Por tanto,  $y$  no puede ser un parámetro.
- Sustituimos el valor de  $y = 1$  en la primera ecuación, obtenemos que  $x + 4 - z = 1$ , entonces  $x = z - 3$ . Por tanto, las variables que podemos usar como parámetros son  $x$  o  $z$ .
- La solución general del sistema puede escribirse como  $\{(z - 3, 1, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\} = \{(x, 1, x + 3) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}$

# El método de eliminación de Gauss-Jordan para resolver sistemas de ecuaciones. Algunas notas.

- Si dos sistemas están representados por matrices equivalentes (por filas), sus soluciones son las mismas.
- Si multiplicamos una ecuación por un número real diferente de cero, la solución no cambia.
- Si reordenamos las ecuaciones del sistema, las soluciones no cambian.
- Si a una ecuación le añadimos otra multiplicada por un número, las soluciones no cambian.
- El método de Gauss-Jordan consiste en transformar un sistema en otro equivalente, representado por una matriz escalonada.

## El método de eliminación de Gauss-Jordan para resolver sistemas de ecuaciones. Ejemplo completo

- Consideremos el sistema 
$$\begin{cases} bx + y + z = a \\ x + y + 2z = b \\ 2x + y + z = a \end{cases}.$$

- La matriz asociada es 
$$\begin{pmatrix} b & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 2 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

- Reordenando las filas, obtenemos 
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & b \\ b & 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

- A continuación realizamos las siguientes operaciones

$$\text{fila 2} \mapsto \text{fila 2} - b \times \text{fila 1} \quad \text{fila 3} \mapsto \text{fila 3} - 2 \times \text{fila 1}$$

$$\text{Obtenemos } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & b \\ 0 & 1-b & 1-2b & a-b^2 \\ 0 & -1 & -3 & a-2b \end{pmatrix}$$

## El método de eliminación de Gauss-Jordan para resolver sistemas de ecuaciones. Ejemplo completo

- Intercambiamos filas 2 y 3, 
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & b \\ 0 & -1 & -3 & a - 2b \\ 0 & 1 - b & 1 - 2b & a - b^2 \end{pmatrix}.$$

- fila 3  $\mapsto$  fila 3 + (1 - b)  $\times$  fila 2. Obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & b \\ 0 & -1 & -3 & a - 2b \\ 0 & 0 & b - 2 & -(a - b)(b - 2) \end{pmatrix}.$$

- Entonces

- 1 si  $b \neq 2$ , entonces  $\text{rango}A = \text{rango}(A|b) = 3$ . Para cualquier valor de  $a \in \mathbb{R}$ , el sistema es compatible determinado.

- 2 Si  $b = 2$ , obtenemos la matriz asociada 
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & a - 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para cualquier valor de  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\text{rango}A = \text{rango}(A|b) = 2$  y el sistema es compatible indeterminado con un parámetro.

# La Regla de Cramer

- Consideremos el sistema: 
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

- Supongamos que  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$ . Así pues, el sistema tiene una única solución,  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ .

# Regla de Cramer.

- Entonces,

$$x_1^* = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}} \quad x_2^* = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}} \dots$$
$$\dots x_n^* = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}.$$