Clase 14
Matemáticas para la Economía II

Capítulo 5: Optimización. Parte IV: Extremos globales de funciones cóncavas y convexas. Ejemplos

Grados en Administración de Empresas, Finanzas y Contabilidad, Empresa y Tecnología, Estudios Internacionales y Administración de Empresas y Derecho y Administración de Empresas

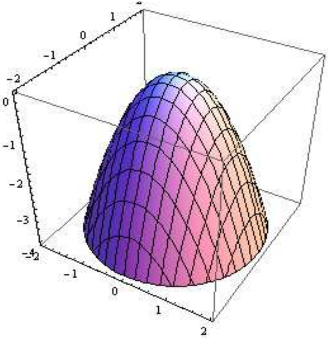
Universidad Carlos III de Madrid

Optimización de funciones convexas (cóncavas) .

Sea D un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$. Consideremos uno de los problemaas siguientes:

- La función $f : D \to \mathbb{R}$ es cóncava in D y estudiamos the problema

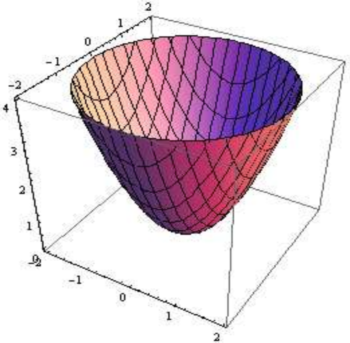
$$\max_{x \in D} f(x)$$



funciones convexas (cóncavas).

- La función $f : D \to \mathbb{R}$ es convexa en D y estudiamos el problema

$$\min_{x \in D} f(x)$$



funciones convexas (cóncavas).

Proposition

Sea D be un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$. Sea $f : D \to \mathbb{R}$.

1. *si f es cóncava y p es un máximo local de f en D, entonces p es un máximo de global f en D.*
2. *si f es convexa, y $p \in D$ es un mínimo local de f en D, entonces p es un mínimo local de f en D.*

Proposition

Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y abierto, $p \in D$ y $f \in C^1(D)$.

1. *si f es cóncava en D entonces, p es un máximo global de f en D si y sólo si $\nabla f(p) = 0$.*
2. *si f es convexa en D entonces, p es un mínimo local de f en D si y sólo si $\nabla f(p) = 0$.*

Demostración.

- si f tiene un punto extremo en p entonces, $\nabla f(p) = 0$.
- si, por ejemplo, f es cóncava entonces, para cada $x \in D$ tenemos que

$$f(x) \leq f(p) + \nabla f(p)(x - p) = f(p)$$

- Como, $\nabla f(p) = 0$, tenemos que $f(x) \leq f(p)$ para cualquier otro $x \in D$.

Remark.

- si f es estrictamente cóncava entonces,

$$f(x) < f(p) + \nabla f(p)(x-p) = f(p)$$

- El punto donde se alcanza máximo es único.
- si f es estrictamente convexa entonces,

$$f(x) > f(p) + \nabla f(p)(x-p) = f(p)$$

- El punto donde se alcanza el mínimo es único.

Ejemplo 1.

- Sea $f = x^3 - 6xy - 21x - 3y^2 + 3y$.
- $\nabla f(x, y) = \left(3x^2 - 6y - 21, -6x - 6y + 3\right)$.
- Las ecuaciones que definen los puntos críticos son

$$\begin{aligned} 3x^2 - 6y &= 21 \\ 6x + 6y &= 3 \end{aligned}$$

- Las soluciones son $\left(-4, \frac{9}{2}\right)$ y $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$.

Ejemplo 1.

- $\mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix}$.
- En los puntos críticos

$$\mathrm{H}\left(-4, \frac{9}{2}\right) = \begin{pmatrix} -24 & -6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix}, \text{con} \quad D_1 = -24 < 0, D_2 = 108 > 0$$

$$\mathrm{H}\left(2, -\frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix} \text{con} \quad D_1 = 12 > 0, D_2 = -108 < 0$$

- Por lo tanto,
  - El punto $\left(-4, \frac{9}{2}\right)$ corresponde a un máximo local;
  - El punto $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$ corresponde a un punto de silla.
- $f(x,0) = \frac{x^3}{3} - 7x$. Entonces, $\lim_{x\to\infty} f(x,0) = \infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x,0) = -\infty$.
- No hay puntos extremos globales.

Ejemplo 1.

- Consideremos ahora el conjunto convexo $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < -1\}$.
- Para $x \in S$, $D_1 = 6x < 0$ y $D_2 = -36 - 36x > 0$.
- f es cóncava en D.
- sólo el punto $\left(-4, \frac{9}{2}\right)$ satisface la restrcición $x < -1$.
- $\left(-4, \frac{9}{2}\right)$ corresponde a un máximo global del problema

$$\begin{array}{rc} \max / \min & f(x, y) \\ \text{en el conjunto} & S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < -1\} \end{array}$$

Ejemplo 2.

- Sea $f = x^2 + 4xy - 2x + 2y^3 + 6y^2 - 20y$.
- $\nabla f(x,y) = \left(2x + 4y - 2, 4x + 6y^2 + 12y - 20\right)$.
- Las ecuaciones que definen los puntos críticos son

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 2 \\ 4x + 6y^2 + 12y &= 20 \end{aligned}$$

Las soluciones son $(5, -2)$ y $\left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Ejemplo 2.

- $\mathrm{H}\,f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 12y+12 \end{pmatrix}$.
- En los puntos críticos

$$\mathrm{H}\,(5,-2) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}, \text{con} \quad D_1 = 2 < 0, D_2 = -40 < 0$$

$$\mathrm{H}\left(-\frac{5}{3},\frac{4}{3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 28 \end{pmatrix} \text{con} \quad D_1 = 2 > 0, D_2 = 40 > 0$$

- Por lo tanto,
  - El punto $(5,-2)$ corresponde a un punto de silla;
  - El punto $\left(-\frac{5}{3},\frac{4}{3}\right)$ corresponde a un mínimo local.
- No corresponde a un mínimo global porque,

$$\lim_{y\to-\infty} f(0,y) = \lim_{y\to-\infty} \left(2y^3+6y^2-20y\right) = -\infty$$

Ejemplo 2.

- Consideremos ahora el conjunto convexo $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > -1/3\}$.
- Para $x \in S$, $D_1 = 2 > 0$ y $D_2 = 8 + 24y > 0$.
- f es convexa en D.
- Sólo el punto $\left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$ satisface la restrcición $y > -1/3$.
- $\left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$ corresponde a un mínimo local del problema

$$\begin{array}{cc} \max / \min & f(x, y) \\ \text{en el conjunto} & S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > -1/3\} \end{array}$$