

Clase 13

Matemáticas para la Economía II

Capítulo 5: Optimización. Parte III: Optimización con restricciones de desigualdad. El método de Kuhn-Tucker

Grados en Administración de Empresas, Finanzas y Contabilidad, Empresa y Tecnología, Estudios Internacionales y Administración de Empresas y Derecho y Administración de Empresas

Universidad Carlos III de Madrid

Optimización con restricciones de desigualdad.

- Consideramos problemas de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) \\ \text{s.a.} \quad & g_1(x) \geq 0 \\ & g_2(x) \geq 0 \\ & \vdots \\ & g_m(x) \geq 0 \end{aligned} \tag{0.1}$$

- Si $g_k(p) = 0$ decimos que la restricción k se satura en el punto p .
- Si $g_k(p) > 0$ decimos que la restricción k no se satura en el punto p .
- Al problema de optimización 0.1 le asociamos la función Lagrangiana

$$L(x) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \cdots + \lambda_m g_m(x) \tag{0.2}$$

El método de Kuhn-Tucker.

Proposición

Supongamos que las funciones f, g_1, \dots, g_m son de clase C^1 y que se satisface la condición de que la restricción no es degenerada. Si p es una solución de problema 0.1, entonces existen $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que

- 1 $\nabla L(p) = 0,$
- 2 $\lambda_1 g_1(p) = 0, \dots, \lambda_m g_m(p) = 0,$
- 3 $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0,$

donde $L(x)$ es el **Lagrangiano** definido en 0.2.

El método de Kuhn-Tucker.

- Las ecuaciones

① $\nabla L(p) = 0,$

② $\lambda_1 g_1(p) = 0, \dots, \lambda_m g_m(p) = 0,$

③ $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0,$

④ $g_1(p) \geq 0, \dots, g_m(p) \geq 0.$

son las ecuaciones de **Kuhn-Tucker** del problema 0.1.

- La proposición 3 es válida sólo cuando el problema se escribe de la forma 0.1. Si, por ejemplo, tenemos que calcular el mínimo de una función o las restricciones son de la forma \leq en lugar de \geq , entonces hay que reescribir el problema tal como está en 0.1.
- Por ejemplo, encontrar el mínimo de $f(x)$ es lo mismo que encontrar el máximo de $-f(x)$; o, si la restricción i -ésima es $g_i(x) \leq a_i$, esto es equivalente a la restricción $a_i - g_i(x) \geq 0$.

Ejemplo: sustitutos perfectos.

- Supongamos que un agente tiene renta 5 y que su función de utilidad sobre cestas de consumo es $u(x, y) = 2x + y$.
- Supongamos que los precios de los bienes son $p_1 = 3$, $p_2 = 1$
- Calculamos las funciones de demanda del agente. El problema maximización del agente es

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x + y \\ \text{s.a.} \quad & 3x + y \leq 5 \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

- Primero escribimos el problema en la forma 0.1

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x + y \\ \text{s.a.} \quad & 5 - 3x - y \geq 0 \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Ejemplo: sustitutos perfectos.

- El Lagrangiano asociado es

$$L(x, y) = 2x + y + \lambda_1(5 - 3x - y) + \lambda_2x + \lambda_3y$$

y las ecuaciones de Kuhn-Tucker son

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2 - 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 - \lambda_1 + \lambda_3 = 0$$

$$\lambda_1(5 - 3x - y) = 0$$

$$\lambda_2x = 0$$

$$\lambda_3y = 0$$

$$3x + y \leq 5$$

$$x \geq 0$$

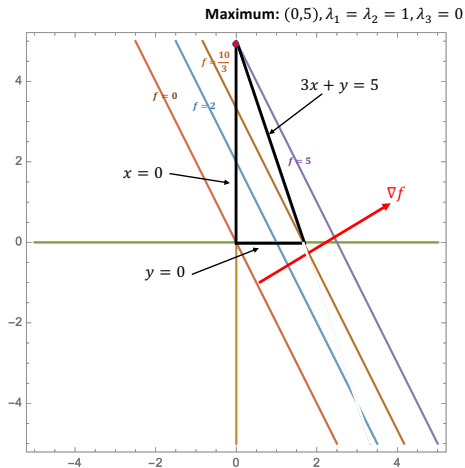
$$y \geq 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$$

Ejemplo: sustitutos perfectos.

- Observemos que si $\lambda_1 = 0$ entonces la primera ecuación implica que $\lambda_2 = -2 < 0$, que contradice la ecuación $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$.
- Por lo tanto, $\lambda_1 > 0$.
- De la ecuación $\lambda_1(5 - 3x - y) = 0$ concluimos que $5 - 3x - y = 0$ por lo que $y = 5 - 3x$.
- Supongamos que $x > 0$.
- La ecuación $\lambda_2 x = 0$ implica que $\lambda_2 = 0$.
- De la primera ecuación vemos que $\lambda_1 = 2/3$
- Sustituyendo en la ecuación obtenemos que $\lambda_3 = \lambda_1 - 1 = -1/3 < 0$ que contradice la ecuación $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$.
- concluimos que $x = 0, y = 5$.
- $x = 0, y = 5, \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$ es la única solución del sistema.

Ejemplo.



Ejemplo.

- Considere

$$\max_{x,y} x^2 + y^2 + y - 1$$

$$\text{s.a. } x^2 + y^2 \leq 1$$

- Las funciones $x^2 + y^2 + y - 1$ y $x^2 + y^2$ son de clase C^∞ y el conjunto $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$ es compacto.
- Por el Teorema de Weierstrass' el problema tiene un máximo global y un mínimo global.
- Las condiciones de regularidad se satisfacen.
- El Lagrangiano es $L = x^2 + y^2 + y - 1 + \lambda(1 - x^2 - y^2)$.

Ejemplo.

- Las ecuaciones de Kuhn-Tucker son

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2\lambda x = 0 \quad (0.3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + 1 - 2\lambda y = 0 \quad (0.4)$$

$$\lambda(x^2 + y^2 - 1) = 0 \quad (0.5)$$

$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad (0.6)$$

$$\lambda \geq 0 \quad (0.7)$$

- si $\lambda = 0$, son $x = 0$ (por la ecuación 0.3), $y = -1/2$ (por la ecuación 0.4).
- Obtenemos la solución $x = 0$, $y = -\frac{1}{2}$, $\lambda = 0$.
- Si $\lambda \neq 0$, entonces $x^2 + y^2 - 1 = 0$.
- La ecuación 0.3 se puede reescribir como $x(1 - \lambda) = 0$.
- Si $x = 0$, entonces $y = \pm 1$. Si $y = 1$, de la ecuación 0.4 vemos que $\lambda = 3/2$ y obtenemos la solución $x = 0$, $y = 1$, $\lambda = \frac{3}{2}$.

Ejemplo.

- Si $y = -1$, de la ecuación 0.4 vemos que $\lambda = 1/2$ y obtenemos la solución $x = 0$, $y = -1$, $\lambda = \frac{1}{2}$.
- Finalmente, si $\lambda = 1$, de la ecuación 0.4 obtenemos $2y + 1 - 2y = 0$, que es imposible.
- Las soluciones de las ecuaciones de Kuhn-Tucker son

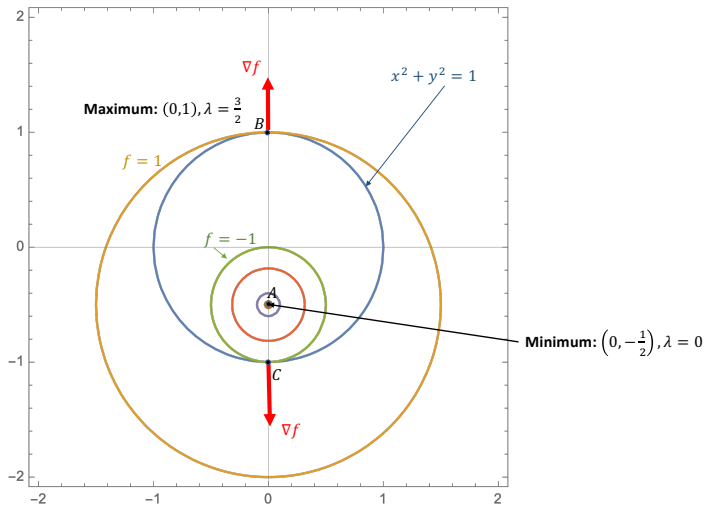
$$A: \quad x = 0, \quad y = -\frac{1}{2}, \quad \lambda = 0$$

$$B: \quad x = 0, \quad y = 1, \quad \lambda = \frac{3}{2}$$

$$C: \quad x = 0, \quad y = -1, \quad \lambda = \frac{1}{2}$$

Como, $f(0, -1/2) = \frac{-5}{4}$, $f(0, 1) = 1$, $f(0, -1) = -1$, el mínimo global se alcanza en $(0, -1/2)$ y el máximo global se alcanza en $(0, 1)$.

Ejemplo.



Interpretación económica de los multiplicadores de Lagrange.

- Considere el problema,

$$(L2) \quad \begin{array}{ll} \max & f(x) \\ \text{s.a.} & g_1(x) = \alpha_1 \\ & g_2(x) = \alpha_2 \\ & \vdots \\ & g_m(x) = \alpha_m \end{array}$$

- Supongamos que la solución, $x = x(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, del problema anterior es única y satisface las ecuaciones de Lagrange .
- $x = x(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, es un punto crítico del Lagrangiano $L(x) = f(x) + \lambda_1(\alpha_1 - g_1(x)) + \dots + \lambda_m(\alpha_m - g_m(x))$.
- Los multiplicadores de Lagrange, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ dependen de los parámetros $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, aunque no lo escribimos explícitamente.

Interpretación económica de los multiplicadores de Lagrange.

- Considere la función valor

$$F(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = f(x(\alpha_1, \dots, \alpha_m))$$

- Entonces, para cada $i = 1, \dots, m$,

$$\left| \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} \right| = |\lambda_i| \quad (0.8)$$

Ejemplo: Indirect utilidad.

- Considere el problema,

$$\begin{aligned} \max \quad & u(x, y) \\ \text{s.a.:} \quad & p_1x + p_2y = m \end{aligned}$$

- En este problema, el agente elige una cesta de consumo (x, y) sujeto a la restricción de que, dados los precios (p_1, p_2) , esta cesta cuesta $p_1x + p_2y = m$ y la renta del agente es m .
- Consideremos la función Lagrangiana,
 $L(x) = u(x) + \lambda(m - p_1x - p_2y)$.
- Sea $x(p_1, p_2, m)$, $y(p_1, p_2, m)$ la solución (supongamos que es única).
- Sea, $V(p_1, p_2, m) = u(x(p_1, p_2, m))$ la función indirecta de utilidad.
- Entonces, $\frac{\partial V}{\partial m} = \lambda$.
- λ representa la utilidad marginal de la renta.