Session 12
Matemáticas para la Economía II

Capítulo 5: Optimización. Parte II: Optimización con restricciones de igualdad. El método de Lagrange

Grados en Administración de Empresas, Finanzas y Contabilidad, Empresa y Tecnología, Estudios Internacionales y Administración de Empresas y Derecho y Administración de Empresas

Universidad Carlos III de Madrid

Optimización con restricciones de igualdad.

- Consideramos problemas de la siguiente forma,

$$
\begin{aligned}
\max \quad (\text{resp. } \min) \quad & f(x) \\
\text{s.a.} \quad & g_1(x) = 0 \\
& g_2(x) = 0 \\
& \vdots \\
& g_m(x) = 0
\end{aligned}
\tag{0.1}
$$

- Un punto $p \in \mathbb{R}^n$ es una solución al problema (0.1) si
- Satisface todas las restricciones,

$$g_1(p) = g_2(p) = \cdots = g_m(p) = 0$$

y

- $f(p) \geq f(x)$ (resp. $f(p) \leq f(x)$) para cualquier otro punto $x \in \mathbb{R}^n$ que también satisfaga las restricciones $g_1(x) = g_2(x) = \cdots = g_m(x) = 0$.

Condición de regularidad.

- Sea

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : g_1(x) = g_2(x) = \cdots = g_m(x) = 0\} \tag{0.2}$$

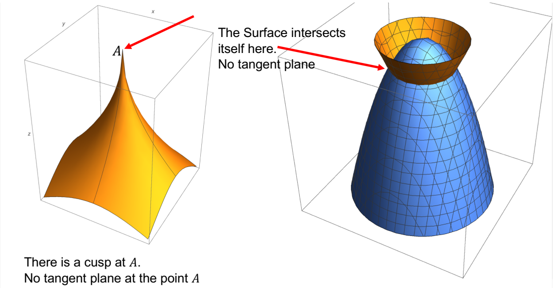
  el conjunto de soluciones factibles al problema (P).
- Sea $g(x) = (g_1(x), g_2(x), \cdots, g_m(x))$.
- Asumimos que

$$\text{rango}\,(\mathrm{D}\, g(p)) = m, \quad \text{en cada punto } p \in M. \tag{0.3}$$

- Esto quiere decir que cada conjunto M tiene una "superficie" de dimensión superior en $\mathbb{R}^n$ de dimensión $n - m$ con un bien definido plano tangente.

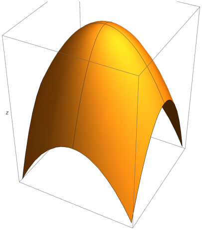
Condición de regularidad.

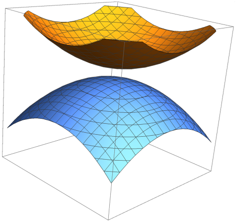
- Las siguientes superficies **no satisfacen** la condición de regularidad



Condición de regularidad.

Las siguientes superficies **satisfacen** la condición de regularidad.





La condición de regularidad.

- En particular, en cada punto $p \in M$ podemos calcular el plano tangente T_pM a M como sigue

$$p+\{v \in \mathbb{R}^n : \mathrm{D}\, g(p)v = 0\} = \{p+v : v \in \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{D}\, g(p)v = 0\} \quad (0.4)$$

- v pertenece al conjunto $\{v \in \mathbb{R}^n : \mathrm{D}\, g(p)v = 0\}$ si y sólo si v satisface las siguientes ecuaciones

$$\nabla g_1(p) \cdot v = \nabla g_2(p) \cdot v = \cdots = \nabla g_m(p) \cdot v = 0 \qquad (0.5)$$

Condiciones de Primer orden.

Proposición (Método de Lagrange)

Consideremos el problema (0.1). Y supongamos que las funciones f, $g_1, \ldots g_m$ son de clase C^1 y que la condición de regularidad (0.3) se cumple. Si p es una solución al problema (0.1), entonces hay $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla L(p) = 0$$

donde

$$L(x) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \ldots + \lambda_m g_m(x)$$

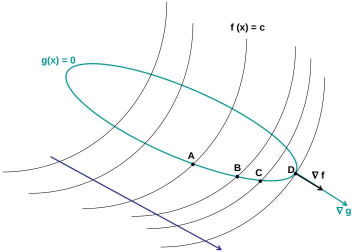
se llama **función Lagrangiana** *asociada al problema (0.1).*

Teorema de Lagrange. Interpretación.

- Asumimos que $n = 2$ y que hay una única restricción,

$$\begin{aligned} \max \quad &= \quad f(x,y) \\ \text{s.a.} \quad & \quad g(x,y) = 0 \end{aligned}$$

- Podemos ver que $f(A) < f(B) < f(C) < f(D)$.
- Si en D nos movemos en la dirección de $\nabla f(D)$, ya no se verifica la restricción $g(x) = 0$. En D, las curvas de nivel $f(x) = c$ y $g(x) = 0$ son tangentes: $\nabla f(D)$ y $\nabla g(D)$ son paralelas. Esto es, $\nabla f(D) = \lambda \nabla g(D)$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.



Ejemplo.

- Encontremos los puntos extremos de la función

$$f(x, y) = 3x^2y + x - 2y$$

en el conjunto

$$S = \{(x, y) : 2y - x = 2\}$$

- El Lagrangiano es

$$L(x, y) = 3x^2y + x - 2y + \lambda(x - 2y + 2)$$

- Las ecuaciones de Lagrange son

$$\begin{aligned} 6xy + 1 + \lambda &= 0 \\ 3x^2 - 2 - 2\lambda &= 0 \\ 2y - x &= 2 \end{aligned}$$

Ejemplo.

$$\begin{aligned} 6xy + 1 + \lambda &= 0 \\ 3x^2 - 2 - 2\lambda &= 0 \\ 2y - x &= 2 \end{aligned}$$

- Multiplicando la primera ecuación por 2 y reolviendo para 2λ en las dos primeras ecuaciones obtenemos $2\lambda = -2 - 12xy = 3x^2 - 2$. Esto es,

  $$-4xy = x^2$$

  Una solución es

  $$x = 0, \quad y = 1, \quad \lambda = -1$$

- En otro caso, $y = -x/4$ y de la última ecuación obtenemos la solución

  $$x = -\frac{4}{3}, \quad y = \frac{1}{3}, \quad \lambda = \frac{5}{3}$$

Maximización de la utilidad con restricciones presupuestarias.

- Consideremos el problema

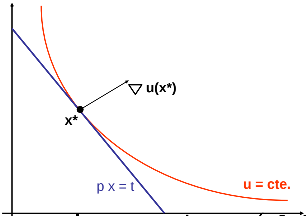
$$\left.\begin{array}{ll} \max & u(x) \\ \text{s.t.} & p \cdot x = t \end{array}\right\}$$

- $x \in \mathbb{R}^n_+$ es una cesta de consumo.
- $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ son los precios de los bienes.
- El agente tiene una renta t
- El agente elige una cesta de consumo x tal que maximice su utilidad, condicionado a la restricción presupuestaria, $p \cdot x = t$.
- La función Lagrangiana es $L = u(x) + \lambda(t - px)$.
- Las ecuaciones de Lagrange son

$$\left.\begin{array}{l} \nabla u = \lambda p \\ px = t \end{array}\right\} \tag{0.6}$$

- Así pues, si x^* es una solución del problema, se tiene que $\nabla u(x^*)$ es perpendicular al plano $p \cdot x = t$.

Maximización de la utilidad con una restricción presupuestaria.



- Por otro lado, vemos que las ecuaciones (0.6) son equivalentes a

$$\mathrm{MRS}_{ij}(x) = \frac{p_i}{p_j} \quad px = t$$

donde

$$\mathrm{MRS}_{ij} = \frac{\partial u \,/\partial x_i}{\partial u \,/\partial x_j}$$

es la relación marginal de sustitución entre el bien i y el bien j.

Condiciones de segundo orden.

Proposición

Supongamos que las funciones f, $g_1, \ldots g_m$ *son de clase* C^2, *la condición de regularidad (0.3) se satisface y existen los multiplicadores de Lagrange* $\lambda_1 \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ *y* $p \in \mathbb{R}^n$ *tal que* p *verifica*

- *las restricciones* $g_1(p) = g_2(p) = \cdots = g_m(p) = 0$,
- *las ecuaciones de Lagrange,* $\nabla L(p) = 0$, *donde* $L(x) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \ldots + \lambda_m g_m(x)$ *es la función de Lagrange asociada al problema (0.1).*

Entonces,

1. *Si* $v \cdot \mathrm{H}\, L(p) v < 0$ *para cada vector* $v \neq 0$ *que verifica las ecuaciones (0.5), entonces* p *corresponde a un máximo local (estricto)de* f.
2. *Si* $v \cdot \mathrm{H}\, L(p) v > 0$ *para cada vector* $v \neq 0$ *que verifica las ecuaciones (0.5), entonces* p *corresponde a un mínimo local (estricto) de* f.

Ejemplo 1.

- Resolvamos el problema

$$\begin{array}{ll} \max & x^2 + y^2 \\ \text{s.a.} & xy = 4 \end{array}$$

- Sea $f(x,y) = x^2 + y^2$, $g(x,y) = xy$.
- $\nabla g(x,y) = 2(y,x)$ que no se anula en el conjunto $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon xy = 4\}$. Así pues, la condición de regularidad se satisface.
- La función Lagrangiana $L(x,y;\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(xy - 4)$.
- Las ecuaciones de Lagrange

$$\begin{aligned} 2x + \lambda y &= 0 \\ 2y + \lambda x &= 0 \\ xy &= 4. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.

- El sistema anterior tiene dos soluciones

$$\begin{aligned} x &= y = 2, \lambda = -2 \\ x &= y = -2, \lambda = -2. \end{aligned}$$

- La matriz Hessiana de L en el punto $(2,2;-2)$ es

$$\mathrm{H}\, L_{(2,2)} = \begin{pmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 2 \end{pmatrix}\Bigg|_{\lambda=2} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Por otro lado,

$$\begin{aligned} T_{(2,2)}M &= \{v \in \mathbb{R}^2 \colon \nabla g(2,2) \cdot v = 0\} \\ &= \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \colon (2,2) \cdot (v_1, v_2) = 0\} \\ &= \{(t, -t) \in \mathbb{R}^2 \colon t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.

- De aquí,

$$(t, -t) \cdot \mathrm{H}\, L_{(2,2)} \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} = (t, -t) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} = 8t^2$$

  tal que $\mathrm{H}\, L_{(2,2)}$ es definida positiva en $T_{(2,2)}M$ y podemos concluir que $(2, 2)$ corresponde a un mínimo.

Ejemplo 2.

- Consideremos el problema

$$\begin{array}{cc} \max & xy \\ \text{s.a.} & p_1 x + p_2 y = m \end{array}$$

  con $m, p_1, p_2 \neq 0$.
- Sea $f(x,y) = xy$, $g(x,y) = m - p_1 x - p_2 y$.
- $\nabla g(x,y) = (y,x)$ la cual no se anula en el conjunto $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon p_1 x + p_2 y = m\}$. La condición de regularidad se satisface.
- La función Lagrangiana es $L(x) = xy + \lambda(m - p_1 x - p_2 y)$.
- Las ecuaciones de Lagrange son,

$$\begin{aligned} y - \lambda p_1 &= 0 \\ x - \lambda p_2 &= 0 \\ p_1 x + p_2 y &= m. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.

- La solución es $x = \frac{m}{2p_1}$, $y = \frac{m}{2p_2}$, $\lambda = \frac{m}{2p_1 p_2}$.
- La matriz Hessiana de L en el punto $(x^*, y^*) = \left(\frac{m}{2p_1}, \frac{m}{2p_2}; \frac{m}{2p_1 p_2}\right)$ es

$$\mathrm{H}\,L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  la cual es no-definida.
- Por otro lado,

$$\begin{aligned} T_{(x^*,y^*)}M &= \{v \in \mathbb{R}^2 \colon \nabla g\left(\frac{m}{2p_1}, \frac{m}{2p_2}\right) \cdot v = 0\} \\ &= \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \colon (p_1, p_2) \cdot (v_1, v_2) = 0\} \\ &= \{(t, -\frac{p_1}{p_2} t) \in \mathbb{R}^2 \colon t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.

- Así pues, $(t, -\frac{p_1}{p_2}t) \cdot \mathrm{H}\, L(x^*, y^*) \begin{pmatrix} t \\ -\frac{p_1}{p_2}t \end{pmatrix} =$

  $(t, -\frac{p_1}{p_2}t) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -\frac{p_1}{p_2}t \end{pmatrix} = -\frac{p_1}{p_2}t^2 < 0$ if $t \neq 0$.
- Se tiene, $\left(\frac{m}{2p_1}, \frac{m}{2p_2}\right)$ que corresponde a un máximo.