

# Sesión 11

## Matemáticas para la Economía II

### Capítulo 5: Optimización. Parte I: Optimización sin Restricciones

Grados en Administración de Empresas, Finanzas y Contabilidad, Empresa y Tecnología,  
Estudios Internacionales y Administración de Empresas y Derecho y Administración de  
Empresas

Universidad Carlos III de Madrid

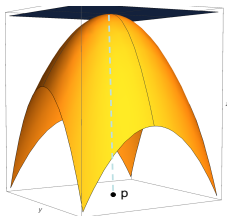
## Condiciones Necesarias de Primer Orden.

### Proposición

Si  $p \in D$  es un máximo o mínimo local de  $f$  en el conjunto **abierto**  $D$ , entonces

$$\nabla f(p) = 0$$

Si  $p \in D$  es un máximo o mínimo local de  $f$ , el plano tangente a la gráfica de la función  $f$  en  $(p, f(p))$  es horizontal. El vector normal al plano tangente tiene la dirección del eje vertical  $Z$ .



## Condiciones necesarias de primer orden.

- $p \in D$  es un **punto crítico** si: o bien  $f$  no es diferenciable en  $p$  o bien

$$\nabla f(p) = 0$$

- Si  $p$  es un extremo local de  $f$ , entonces  $p$  es un punto crítico de  $f$ .
- Si  $\nabla f(p) = 0$ , pero  $p$  no es un extremo local de  $f$ , entonces  $p$  es un **punto de silla**.

## Condiciones necesarias de segundo orden.

### Proposición

Sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función en la clase  $C^2(D)$ , con  $D$  abierto.

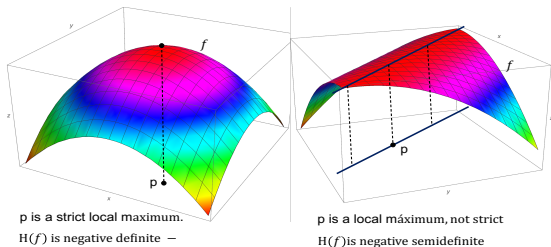
- 1 Si  $p$  es un máximo local de  $f$  en  $D$ , entonces la matriz hessiana  $H f(p)$  es semidefinida negativa o definida negativa.
- 2 Si  $p$  es un mínimo local de  $f$  en  $D$ , entonces la matriz hessiana  $H f(p)$  es semidefinida positiva o definida positiva.

## Condiciones suficientes de segundo orden.

Sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función en la clase  $C^2(D)$ , con  $D$  abierto.  
Supongamos que

$$\nabla f(p) = 0$$

- Si  $Hf(p)$  es definida negativa, entonces  $p$  es un máximo local (estricto) de  $f$ .

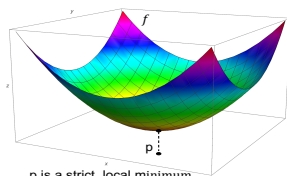


## Condiciones suficientes de segundo orden.

Sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función en la clase  $C^2(D)$ , con  $D$  abierto.  
Supongamos que

$$\nabla f(p) = 0$$

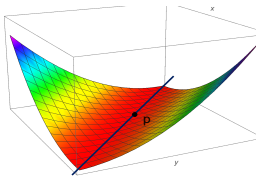
- Si  $Hf(p)$  es definida positiva, entonces  $p$  es un mínimo local (estricto) de  $f$ .



$p$  is a strict local minimum.

$H(f)$  is negative definite

+



$p$  local minimum, not strict.

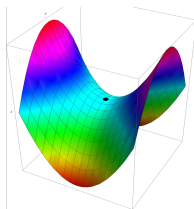
$H(f)$  is negative semidefinite

## Condiciones suficientes de segundo orden.

Sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función en la clase  $C^2(D)$ , con  $D$  abierto.  
Supongamos que

$$\nabla f(p) = 0$$

- Si  $H f(p)$  es indefinida, entonces  $p$  es un punto de silla.



## Condiciones suficientes de segundo orden para una función de dos variables

- Supongamos que  $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$  y la matriz Hessiana es

$$H f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} \end{pmatrix} \Big|_{(x_0, y_0)}.$$

- Sea  $D = \det(H f(x_0, y_0))$ .
- Si  $D < 0$ , entonces  $(x_0, y_0)$  es un punto de silla de  $f$ .
- Si  $D > 0$  y
  - 1  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x_0, y_0) > 0$ , entonces  $(x_0, y_0)$  corresponde a un mínimo local de  $f$ .
  - 2  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x_0, y_0) < 0$ , entonces  $(x_0, y_0)$  corresponde a un máximo local de  $f$ .
  - 3 Si  $D = 0$  este test no aporta información suficiente.

## Ejemplo 1.

- Sea  $f = x^2 - xy^2 - 2xy$ .
- Entonces,  $\nabla f(x, y) = (2x - 2y - y^2, -2x - 2xy)$ ,  
$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -2y - 2 \\ -2y - 2 & -2x \end{pmatrix}$$
- Los puntos críticos son  $(0, -2)$ ,  $(-\frac{1}{2}, -1)$ ,  $(0, 0)$ .
- $Hf(0, -2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ .  $D_1 = 2 > 0$ ,  $D_2 = -4 < 0$ . Entonces,  $(0, -2)$  es un punto de silla.
- $Hf(-\frac{1}{2}, -1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .  $D_1 = 2 > 0$ ,  $D_2 = 2 > 0$ . Entonces,  $(-\frac{1}{2}, -1)$  es un mínimo local.
- $Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ .  $D_1 = 2 > 0$ ,  $D_2 = -4 < 0$ . Entonces,  $(0, 0)$  es un punto de silla.

## Ejemplo 2.

- Sea  $f = -x^2 - xy^2 - 2xy$ .
- Entonces,  $\nabla f(x, y) = (-2x - y^2 - 2y, -2xy - 2x)$ ,  
$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & -2y - 2 \\ -2y - 2 & -2x \end{pmatrix}$$
- Los puntos críticos son  $(0, -2)$ ,  $(\frac{1}{2}, -1)$ ,  $(0, 0)$ .
- $Hf(0, -2) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ .  $D_1 = -2 > 0$ ,  $D_2 = -4 < 0$ . Entonces,  $(0, -2)$  es un punto de silla.
- $Hf(\frac{1}{2}, -1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .  $D_1 = -2 < 0$ ,  $D_2 = 2 > 0$ . So,  $(\frac{1}{2}, -1)$  es un máximo local.
- $Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ .  $D_1 = -2 > 0$ ,  $D_2 = -4 < 0$ . So,  $(0, -2)$  es un punto de silla.

### Ejemplo 3.

- Sea  $f(x, y) = (x - 1)^4 + (y - 1)^2$ .
- Entonces,  $\nabla f(x, y) = (4(x - 1)^3, 2(y - 1))$ ,  
$$H f(x, y) = \begin{pmatrix} 12(x - 1)^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
- El único punto crítico es  $(1, 1)$ .
- $H f(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ . es semidefinida positiva, las condiciones de segundo orden no dan suficiente información.
- Pero,  $f(x, y) \geq 0 = f(1, 1)$ . Por tanto,  $(1, 1)$  es un mínimo global estricto.

