

Sesión 10

Matemáticas para la Economía II

Capítulo 4: Derivadas de Orden Superior. Parte III: Funciones cóncavas y convexas. Caracterizaciones.

Grados en Administración de Empresas, Finanzas y Contabilidad, Empresa y Tecnología, Estudios Internacionales y Administración de Empresas y Derecho y Administración de Empresas

Universidad Carlos III de Madrid

Concavidad y convexidad.

Asumimos que: $D \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo y abierto.

- f es **cóncava** en D si para todo $\lambda \in [0, 1]$ y $x, y \in D$ tenemos que

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

- f es **convexa** en D si para todo $\lambda \in [0, 1]$ y $x, y \in D$ tenemos que

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

- f es convexa en D si y sólo si $-f$ es cóncava en D .

Concavidad y convexidad.

- f es **estríctamente cóncava** en D si para cada $\lambda \in (0, 1)$ y $x, y \in D$, $x \neq y$ tenemos que

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) > \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

- f es **estríctamente convexa** en D si para cada $\lambda \in (0, 1)$ y $x, y \in D$, $x \neq y$ se tiene que

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

- f es estríctamente convexa en D si y sólo si $-f$ es estríctamente cóncava en D .

Las funciones lineales son cóncavas and convexas.

- Las funciones lineales son cóncavas and convexas, Pero no son ni estrictamente cóncavas ni estrictamente convexas.
- Pro ejemplo, $f(x, y) = 2x - y$, $f(x, y, z) = z - 3x + 5y$

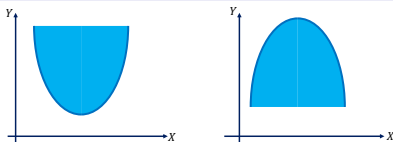
Concavidad y convexidad.

Proposición

Sea D un conjunto convexo, y abierto de \mathbb{R}^n . Entonces,

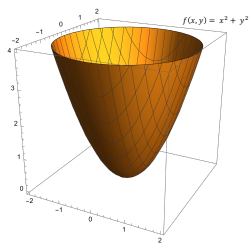
- 1 f es cóncava \Leftrightarrow el conjunto $\{(x, y) : x \in D, y \leq f(x)\}$ es convexo.
- 2 f es convexa \Leftrightarrow el conjunto $\{(x, y) : x \in D, y \geq f(x)\}$ es convexo.
- 3 f es estrictamente convexa \Leftrightarrow el conjunto $\{(x, y) : x \in D, y \geq f(x)\}$ es convexo y la gráfica de f no contiene segmentos.
- 4 f es estrictamente cóncava \Leftrightarrow el conjunto $\{(x, y) : x \in D, y \leq f(x)\}$ es convexo y la gráfica de f no contiene segmentos.

Gráficamente,

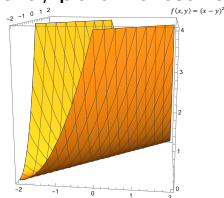


Ejemplos.

- $f(x, y) = x^2 + y^2$ es estrictamente convexa.



- $f(x, y) = (x - y)^2$ es convexa, pero no estrictamente convexa.



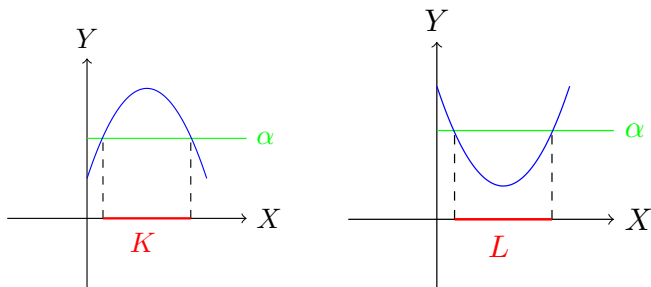
Concavidad y convexidad.

Proposición

Sea D un conjunto convexo y abierto de \mathbb{R}^n y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces,

- 1 Si f es cóncava, entonces el conjunto contorno superior $K = \{x \in D : f(x) \geq \alpha\}$ es convexo para cada $\alpha \in \mathbb{R}$
- 2 Si f es convexa, entonces el conjunto contorno inferior $L = \{x \in D : f(x) \leq \alpha\}$ es convexo para cada $\alpha \in \mathbb{R}$

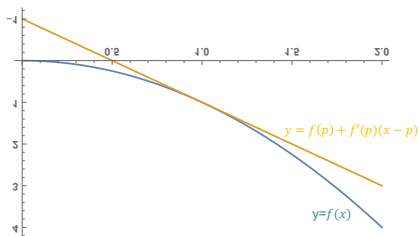
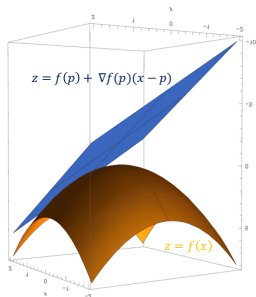
Gráficamente,



Condiciones de primer orden para la concavidad.

- Supongamos que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es cóncava y diferenciable en un conjunto convexo D .
- El plano tangente a la gráfica de f en $p \in D$ queda por arriba de la gráfica de f .
- Esto quiere decir que

$$f(x) \leq f(p) + \nabla f(p) \cdot (x - p), \quad \text{para cada } x \in D$$



Condiciones de primer orden para la concavidad.

Proposición

Supongamos $f \in C^1(D)$. Entonces,

- ① f es cóncava en D si y sólo si para $u, v \in D$ tenemos que

$$f(u) \leq f(v) + \nabla f(v) \cdot (u - v)$$

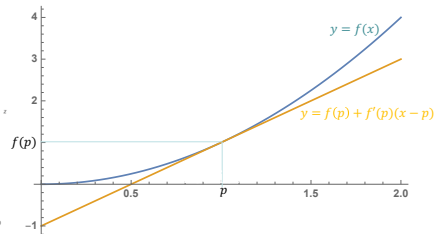
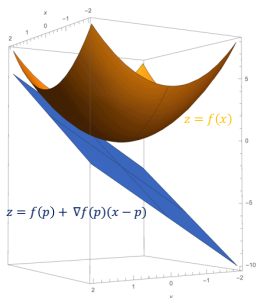
- ② f es estrictamente cóncava en D si y sólo si para todo $u, v \in D$, $u \neq v$, tenemos que

$$f(u) < f(v) + \nabla f(v) \cdot (u - v)$$

Condiciones de primer orden para la convexidad.

- Supongamos que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa y diferenciable en un conjunto convexo D .
- El plano tangente a la gráfica de f en el punto $p \in D$ queda por debajo de la gráfica de f .
- Esto significa que

$$f(x) \geq f(p) + \nabla f(p) \cdot (x - p), \quad \text{para cada } x \in D$$



Condiciones de primer orden para la convexidad.

Proposición

Supongamos que $f \in C^1(D)$. Entonces,

- ① f es convexa en D si y sólo si para todo $u, v \in D$ tenemos que

$$f(u) \geq f(v) + \nabla f(v) \cdot (u - v)$$

- ② f es estrictamente convexa en D si y sólo si para todo $u, v \in D$, $u \neq v$, tenemos que

$$f(u) > f(v) + \nabla f(v) \cdot (u - v)$$

Condiciones de segundo orden para la concavidad/convexidad.

Proposición

Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto y convexo. Sea $f \in C^2(D)$ y sea $Hf(p)$ la matriz hessiana de f en el punto p . Entonces,

- 1 f es cóncava en D si y sólo si para cada $p \in D$, $Hf(p)$ es semidefinida negativa o definida negativa.
- 2 f es convexa en D si y sólo si para cada $p \in D$, $Hf(p)$ es semidefinida positiva o definida positiva.
- 3 If $Hf(p)$ es definida negativa para cada $p \in D$, entonces f es estrictamente cóncava en D .
- 4 Si $Hf(p)$ es definida positiva para cada $p \in D$, entonces f es estrictamente convexa en D .

Condiciones de segundo orden para la concavidad/convexidad.

- Si f es estrictamente convexa, entonces $H f(x, y)$ es definida positiva excepto en un conjunto "pequeño".
- Por ejemplo, $f(x, y) = x^4 + y^4$ es estrictamente convexa
- y

$$H f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

es definida positiva si $xy \neq 0$, esto es, es definida positiva en todo el espacio \mathbb{R}^2 excepto en los dos ejes $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$.

- Para puntos en los ejes (esto es para puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $xy = 0$) la matriz hessiana es semidefinida positiva.

Ejemplo.

- Considere la función

$f(x, y, z) = 2ax^2 + 4axy + 3ay^2 + byz + cz^2 + 13x - 20y + z$ definida en \mathbb{R}^3 , con $a, b, c \in \mathbb{R}$, y $a \neq 0$.

- Determine para qué valores de a, b, c la función es estrictamente convexa. Determine para qué valores de a, b, c la función es estrictamente cóncava.

- Aplique los resultados anteriores para determinar si el conjunto $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2x^2 - 4xy + 13x - 3y^2 + yz - 20y - z^2 + z \geq 10\}$ es convexo.

- Tenemos que

$$\nabla f(x, y, z) = (4ax + 4ay + 13, 4ax + 6ay + bz - 20, by + 2cz + 1).$$

- $H(f)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4a & 4a & 0 \\ 4a & 6a & b \\ 0 & b & 2c \end{pmatrix}$

Ejemplo.

- Obtenemos $D_1 = 4a$, $D_2 = 8a^2 > 0$,
 $D_3 = |A| = 16a^2c - 4ab^2 = 4a(4ac - b^2)$.
- Vemos que si $a > 0$ and $c > \frac{b^2}{4a}$ entonces $D_1, D_2, D_3 > 0$ y la función es convexa.
- Si $a < 0$ y $c < \frac{b^2}{4a}$, tenemos que $D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 < 0$ y la función es cóncava.
- Tomando $a = -1, b = 1, c = -1$ obtenemos la función
 $f(x, y, z) = -2x^2 - 4xy + 13x - 3y^2 + yz - 20y - z^2 + z$. Como $a < 0$ y $c < \frac{b^2}{4a}$, la función f es cóncava y el conjunto D es convexo.

Ejemplo.

- Sea $f(x, y, z) = 2abyz + ax^2 + 2axy + 2ay^2 + cz^2 + 3x + y + 15z - 73$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ $abc \neq 0$.
- Tenemos $\nabla f(x, y, z) = (2ax + 2ay + 3, 2abz + 2ax + 4ay + 1, 2aby + 2cz + 15)$.

$$H(f)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2a & 2a & 0 \\ 2a & 4a & 2ab \\ 0 & 2ab & 2c \end{pmatrix}$$

- Obtenemos $D_1 = 2a$, $D_2 = 4a^2 > 0$,
 $D_3 = |A| = 8a^2c - 8a^3b^2 = 8a^2(c - ab^2)$.
- Se puede ver que para $a > 0$ y $c > ab^2$ tenemos que $D_1, D_2, D_3 > 0$ y la función es convexa.
- Para $a < 0$ y $c < ab^2$ tenemos que $D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 < 0$ y la función es cóncava.

Ejemplo.

- Tomamos $a = -1$, $b = 2$, $c = -5$.

- Obtenemos la función

$$f(x, y, z) = -x^2 - 2xy + 3x - 2y^2 - 4yz + y - 5z^2 + 15z - 73.$$

- Dado que $c < ab^2$, la función f es cóncava.

- El conjunto

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x^2 - 2xy + 3x - 2y^2 - 4yz + y - 5z^2 + 15z \geq 0\}$$

es convexo.

- Dado que $f(x, y, z) \leq f(1, 0, 0) + \nabla f(1, 0, 0) \cdot (x - 1, y, z)$,

$$f(1, 0, 0) = -71,$$

$$\nabla f(x, y, z) = (3 - 2x - 2y, 1 - 2x - 4y - 4z, 15 - 4y - 10z) \text{ y}$$

$$\nabla f(1, 0, 0) = (1, -1, 15), \text{ tenemos la desigualdad,}$$

$$-x^2 - 2xy + 3x - 2y^2 - 4yz + y - 5z^2 + 15z - 73 \leq$$

$$-71 - 1 + x - y + 15z = -72 + x - y + 15z, \text{ para todo } x, y, z \in \mathbb{R}.$$