

Ejercicio	1	2	3	4	5	Total
Puntos						

Duración: 2 horas.

APELLIDOS:

NOMBRE:

ID:

GRADO:

GRUPO:

**Nota importante:** Queda estrictamente prohibido el uso de calculadoras o cualquier otro dispositivo electrónico. Para que un resultado sea tomado en consideración en la calificación, es condición indispensable que esté debidamente justificado; no se evaluará ninguna respuesta que carezca de su correspondiente desarrollo lógico y matemático.

1. Sea la función  $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}$ , definida en  $(-1, \infty)$ . Se pide:

- a) Hallar las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos globales de  $f(x)$ .
- b) Hallar la imagen de  $f(x)$  y representar la gráfica de la función.
- c) Considerar  $f_b(x)$  la función  $f(x)$  restringida al intervalo  $[b, \infty)$ , donde  $b > -1$ . Hallar el máximo y el mínimo global (si existen) de  $f_b(x)$ .

**0,4 puntos apartado a); 0,3 puntos apartado b); 0,3 puntos apartado c)**

a) Por un lado,  $f(x)$  es continua en todo su dominio, luego solo hay que calcular las asíntotas en  $-1^+$  y en  $\infty$ .

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$ , luego  $f(x)$  tiene una asíntota vertical en  $x = -1$  por la derecha.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$  (aplicando L'Hopital)  $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/(x+1)}{(x+1)^{-1/2}/2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x+1}} = 0$ ,

luego  $f(x)$  tiene una asíntota horizontal  $y = 0$  en  $\infty$ .

Y como  $f'(x) = \frac{(1/(x+1))\sqrt{x+1} - \ln(x+1)/2\sqrt{x+1}}{x+1} = \frac{(x+1)^{-1/2}(2 - \ln(x+1))}{2(x+1)}$ ,

el único punto crítico se obtiene cuando  $2 - \ln(x+1) = 0$ , es decir  $x = e^2 - 1$ .

$f'(0) > 0$ , luego  $f'(x) > 0$  si  $x \in (-1, e^2 - 1)$ , luego  $f(x)$  es creciente en  $(-1, e^2 - 1]$ .

$f'(e^2 - 1) < 0$ , luego  $f'(x) < 0$  si  $x \in (e^2 - 1, \infty)$ , luego  $f(x)$  es decreciente en  $[e^2 - 1, \infty)$ . Obviamente  $x = e^2 - 1$  es el maximizador global de  $f(x)$ .

Por otro lado,  $f(x)$  no tiene minimizador global.

b) Por lo anterior, el valor máximo sería  $f(e^2 - 1) = \frac{2}{e}$ . De ahí y de que

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$  se deduce que la imagen de  $f(x)$  sería  $(-\infty, \frac{2}{e}]$ ,

por el teorema de los valores intermedios para funciones continuas.

Así pues, la gráfica de la función quedaría como se puede ver al final.

c) Hemos visto que  $f(x)$  es creciente en  $(-1, e^2 - 1]$ , decreciente en  $[e^2 - 1, \infty)$ ,  $f(0) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0^+$ .

Luego siempre que  $y = 0$  esté en la imagen de  $f_b(x)$ , o lo que es lo mismo, que  $x = 0$  pertenezca al intervalo  $[b, \infty)$ , se obtendrán ambos extremos globales.

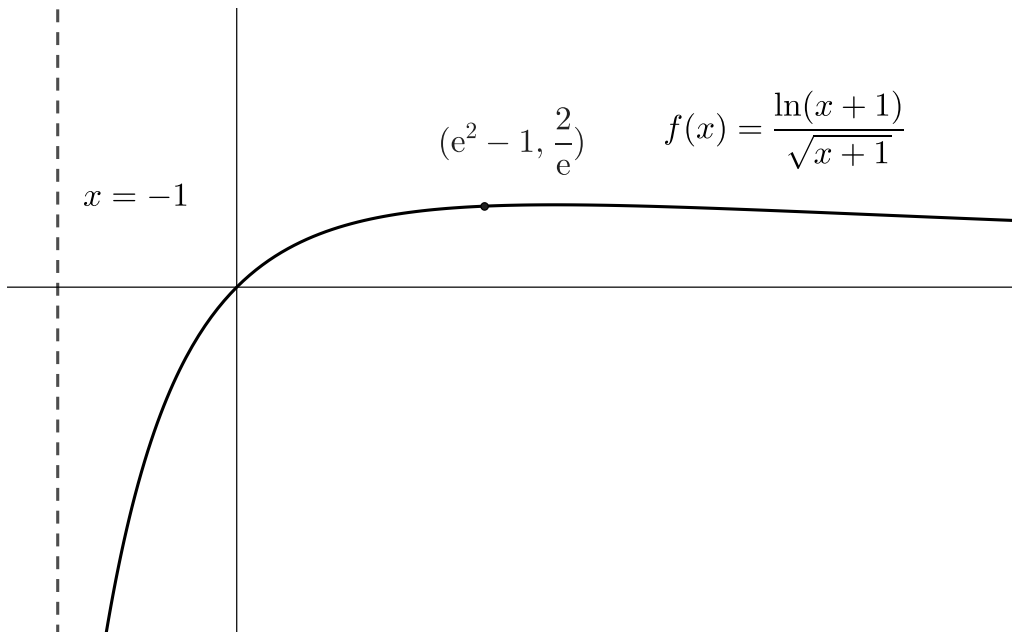
Así pues, hay que tener en cuenta tres casos:

i) si  $b \leq 0 \implies \min(f_b) = f(b)$ ,  $\max(f_b) = \frac{2}{e}$ , luego existen el máximo y mínimo globales.

ii) si  $0 < b \leq e^2 - 1 \implies \min(f_b)$  no existe,  $\max(f_b) = \frac{2}{e}$ .

iii) si  $e^2 - 1 \leq b \implies \min(f_b)$  no existe,  $\max(f_b) = f(b)$ .

Ver, de nuevo, la gráfica de la función.



2. Dada la función  $y = f(x)$ , definida de forma implícita mediante la ecuación  $e^{x+2y} + e^{2x+y} = 2e^3$  en un entorno del punto  $x = 1, y = 1$ , se pide:

- Hallar la recta tangente y el polinomio de Taylor de grado 2 de  $f$  en  $a = 1$ .
- Representar, aproximadamente, la gráfica de  $f(x)$  y  $f^{-1}(x)$  cerca del punto  $x = 1$ .
- Comparar ambas funciones en los intervalos  $(1 - \delta, 1], [1, 1 + \delta)$ .

En cada intervalo, ¿será mayor alguna de las dos funciones, o serán iguales?

Sugerencia para b) y c): observar que  $F(x, y) = F(y, x)$ .

**0,4 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b); 0,2 puntos apartado c).**

- Antes de nada, observamos que el punto  $(1, 1)$  satisface la ecuación.

A continuación, en primer lugar, calculamos la derivada primera de la función:

$$(1 + 2y')e^{x+2y} + (2 + y')e^{2x+y} = 0$$

sustituyendo  $x = 1, y(1) = 1$  se deduce que  $y'(1) = f'(1) = -1$ .

Luego la ecuación de la recta tangente será:  $y = P_1(x) = 1 - (x - 1)$  ó  $y = -x + 2$ .

Análogamente, calculamos la derivada segunda de la función:

$$[2y'' + (1 + 2y')^2]e^{x+2y} + [y'' + (2 + y')^2]e^{2x+y} = 0;$$

sustituyendo  $x = 1, y(1) = 1, y'(1) = -1$  se deduce que:

$$[2y'' + 1]e^3 + [y'' + 1]e^3 = 0 \implies y''(1) = f''(1) = -2/3.$$

Luego el polinomio de Taylor de segundo grado será:

$$P_2(x) = 1 - (x - 1) - \frac{1}{3}(x - 1)^2.$$

- Utilizando el polinomio de Taylor de orden 2, la gráfica de  $f$  y su inversa, cerca del punto  $x = 1$  será, aproximadamente, como se ve en la figura al final.
- Ambas funciones serán iguales, pues si la función implícita  $y = f(x)$  viene dada por la ecuación:

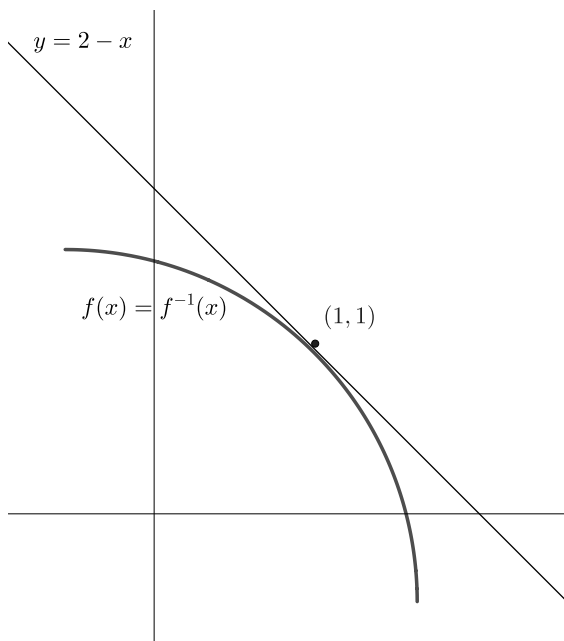
$$F(x, f(x)) = 2e^3$$

entonces, por la sugerencia dada, se cumple que:  $F(f(x), x) = 2e^3$ .

Llamando  $f(x) = t, x = f^{-1}(t)$ , la ecuación anterior se puede escribir como:

$$F(t, f^{-1}(t)) = 2e^3$$

Es decir, la función implícita  $f$  y su inversa  $f^{-1}$  son la misma función.



3. Sea  $C(x) = 16 + 2x + x^2$  la función de costes y  $p(x) = 20 - 2x$  la función inversa de demanda de una empresa monopolista. Se pide:

- a) Hallar el nivel de producción para el que se maximiza el beneficio.
  - b) Hallar el nivel de producción para el que se minimiza el coste medio.
  - c) El gobierno quiere que la empresa produzca al nivel hallado en b). Para ello propone subvencionar cada unidad producida. ¿Cual será la subvención mínima por unidad para que la empresa acepte pasar del nivel de a) al del apartado b), si ella maximiza beneficios?  
**0,4 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b); 0,2 puntos apartado c).**
- 

a) En primer lugar, calculamos la función de beneficios.

$$B(x) = (20 - 2x)x - (16 + 2x + x^2) = -3x^2 + 18x - 16$$

Si calculamos la primera y segunda derivada de  $B$ :

$$B'(x) = -6x + 18; B''(x) = -6 < 0$$

luego vemos que  $B$  tiene un único punto crítico en  $x^* = 3$  y, como  $B$  es una función cóncava, este punto crítico es el único maximizador global.

b) Como la función de costes medios es  $\frac{C(x)}{x} = \frac{16}{x} + 2 + x$ ,

$$\text{su derivada será: } \left(\frac{C(x)}{x}\right)' = -\frac{16}{x^2} + 1 = 0 \iff x' = 4.$$

Como  $\left(\frac{C(x)}{x}\right)'' = \frac{32}{x^3} > 0$ , la función es convexa y el punto crítico será minimizador global.

c)  $B(3) = -27 + 54 - 16 = 11$ ;  $B(4) = -48 + 72 - 16 = 8$ .

Luego la empresa exigirá una compensación total de 3 unidades monetarias.

Como la producción es de 4 unidades, la subvención por unidad será  $3/4$ .

4. Sea  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & x \leq 3 \\ 2x^2 + ax + b, & x > 3 \end{cases}$  Se pide:

- a) Enunciar el teorema del valor medio de Lagrange para una función  $f(x)$  definida en el intervalo  $[0, 4]$ .  
Hallar los valores  $a, b$  para que la función dada satisfaga las hipótesis de dicho teorema.
- b) Enunciar el teorema de los ceros de Bolzano para una función  $f(x)$  definida en el intervalo  $[K, 4]$ .  
Supongase ahora, que para la función dada  $a = -6, b = 2$  y está definida en el intervalo  $[K, 4]$  donde  $K < 3$ .  
¿Para qué valores de  $K$  se cumplen las hipótesis del citado teorema?  
**0,5 puntos apartado a); 0,5 puntos apartado b).**

- a) Las hipótesis son que  $f$  sea continua en  $[0, 4]$  y derivable en  $(0, 4)$ .

La tesis, o conclusión, es que existe  $c \in (0, 4)$  tal que  $f'(c) = (f(4) - f(0))/4$ .

Para ello, necesitamos, en primer lugar, imponer la continuidad de  $f$  en  $x = 3$ .

Como  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 18 + 3a + b$ , y como  $f(3) = 2 = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

se deduce que la función será continua en  $[0, 4]$  cuando:  $3a + b = -16$ .

Por otro lado, suponiendo  $f$  continua, la función será derivable en  $x = 3$  cuando:

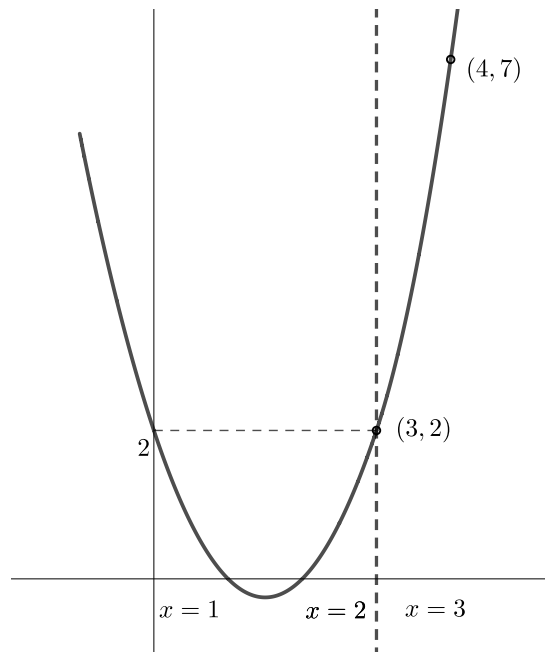
$\lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = f'(3^-)$ . Y ahora tenemos que:

i)  $x > 3 \implies \lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} 4x + a = f'(3^+) = 12 + a;$

ii)  $x < 3 \implies f'(x) = 2x - 3 \implies f'(3^-) = 3.$

Por tanto, se satisfacen las hipótesis del teorema de Lagrange cuando:

$a = -9, b = 11$



- b) Las hipótesis son que  $f$  sea continua en  $[K, 4]$  y que  $f(K) \cdot f(4) < 0$ .

La tesis, o conclusión, es que existe  $c \in (K, 4)$  tal que  $f(c) = 0$ .

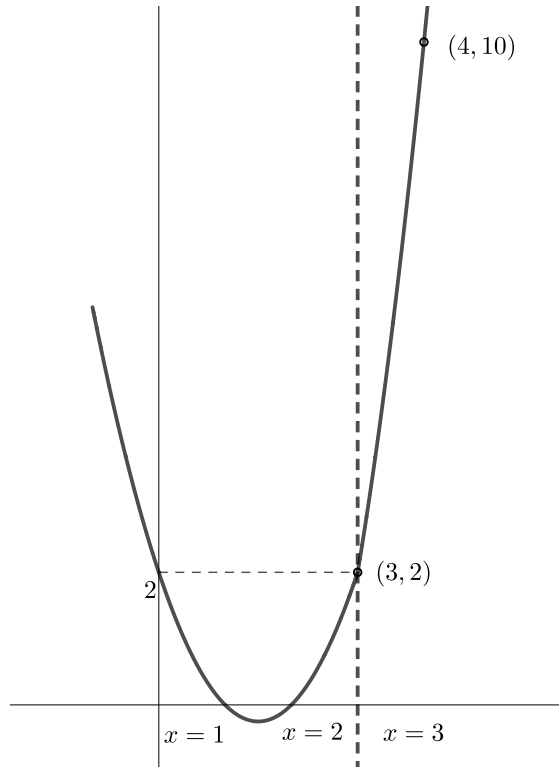
Para los valores dados a  $a, b$  la función es continua, pues:

$f(3) = 2 = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

Por otro lado,  $f(4) > 0$ , luego para que se cumplan las hipótesis tendrá que cumplirse que  $f(K) < 0$ .

Para  $x < 3$  se cumple que  $f(x) = (x - 1)(x - 2)$ , luego

$f(K) < 0$  cuando  $1 < K < 2$ .



5. Dadas  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas por:  $f(x) = \frac{3}{1+x} - x$ ,  $g(x) = \sqrt{9-x}$ , se pide:

- Representar el conjunto  $A$  delimitado por las gráficas de  $f(x)$ ,  $g(x)$  y las rectas  $x = 0$ ,  $x = 9$ .
- Hallar, si existen, los maximales y minimales, máximo y mínimo de  $A$ .
- Calcular el área del conjunto dado, tomando  $\ln 10 \approx 2,35$ .

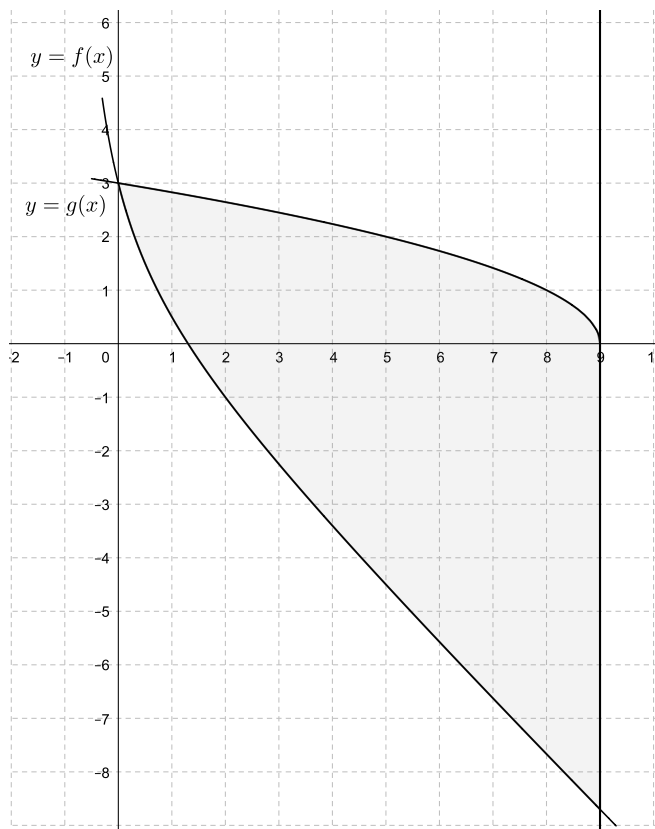
*Sugerencia para b:* el orden de Pareto viene dado por:  $(x_0, y_0) \leq_P (x_1, y_1) \iff x_0 \leq x_1, y_0 \leq y_1$ .

**0,4 puntos apartado a); 0,2 puntos apartado b); 0,4 puntos apartado c)**

- En primer lugar, observamos que las gráficas de  $f(x)$  y  $g(x)$  cortan a la recta  $x = 9$  en los puntos  $(9, -\frac{87}{10})$  y  $(9, 0)$  respectivamente. Por otro lado, las gráficas de  $f(x)$  y  $g(x)$  se cortan en el punto  $(0, 3)$ , y no puede haber otro corte a la derecha de dicho punto, pues ambas funciones son decrecientes,  $f(x)$  convexa,  $g(x)$  cóncava y, cuando cortan a la recta  $x = 9$ , tenemos  $f(9) = -\frac{87}{10} < 0 = g(9)$ .

Por tanto,  $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 9, f(x) \leq y \leq g(x)\}$ .

Luego el dibujo de  $A$  será, aproximadamente, así:



- De esta forma, el orden de Pareto nos describe al conjunto así:

máximo( $A$ ) no existe; maximales( $A$ ) =  $\{(x, g(x)) : 0 \leq x \leq 9\}$ .

mínimo( $A$ ) no existe; minimales( $A$ ) =  $\{(x, f(x)) : 0 \leq x \leq 9\}$ .

- En primer lugar, por la posición de las funciones, sabemos que:

$$\text{Área}(A) = \int_0^9 g(x) dx - \int_0^9 f(x) dx.$$

$$\text{Como } \int g(x) dx = \int \sqrt{9-x} dx = -\frac{2}{3}(9-x)^{3/2} \text{ y } \int f(x) dx = \int \left( \frac{3}{1+x} - x \right) dx = 3 \ln(1+x) - x^2/2$$

luego, por la regla de Barrow:

$$\begin{aligned} \text{Área}(A) &= \left[ -\frac{2}{3}(9-x)^{3/2} - 3 \ln(1+x) + x^2/2 \right]_0^9 = 0 - 3 \ln 10 + 81/2 + \frac{2}{3}27 + 0 - 0 = \\ &= 40,5 + 18 - 3 \ln 10 \approx 58,5 - 7,05 = 51,45 \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$