

Ejercicio	1	2	3	4	5	Total
Puntos						

2 horas.

APELLIDOS:

NOMBRE:

ID:

GRADO:

GRUPO:

(1) Sea la función  $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$ , definida en la recta real. Se pide:

- (a) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos globales, las asíntotas y la imagen de  $f(x)$ .
- (b) Hallar los intervalos de concavidad, convexidad y puntos de inflexión de  $f(x)$ . Representar la gráfica de  $f(x)$ .
- (c) Considerar  $f_1(x)$  y  $f_2(x)$  la función  $f(x)$  restringida a los intervalos donde  $f(x)$  es decreciente, y creciente, respectivamente. Representar  $f_1^{-1}(x)$  y  $f_2^{-1}(x)$ .

*Sugerencia para a):*  $\ln a - b = \ln(a/e^b)$ .

**0,5 puntos apartado a); 0,3 puntos apartado b); 0,2 puntos apartado c)**

a) Por un lado,  $f(x)$  es derivable en toda la recta real. Por otro lado, como

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \text{ el único punto crítico es } x = 0.$$

$f'(x) < 0$  si  $x \in (-\infty, 0)$ , luego  $f(x)$  es decreciente en  $(-\infty, 0]$ .

$f'(x) > 0$  si  $x \in (0, \infty)$ , luego  $f(x)$  es creciente en  $[0, \infty)$ .

Obviamente, de ahí se deduce que  $x = 0$  es el minimizador global de  $f(x)$  y  $f(x)$  no tiene máximo global, pues no hay más puntos críticos.

En cuanto a las asíntotas, como la función es par, basta estudiar el problema en  $\infty$  y aplicar simetría en  $-\infty$ .

Paso 1:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^x + e^{-x})}{x} = \frac{\infty}{\infty} = ((L'Hopital)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x} \cdot \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1;$

Paso 2:  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(e^x + e^{-x}) - \ln e^x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1 + e^{-2x}) = 0.$

Luego  $y = x$  es la asíntota de  $f(x)$  en  $\infty$  y, por simetría,  $y = -x$  es la asíntota de  $f(x)$  en  $-\infty$ .

Finalmente, como  $f(0) = \ln 2$ ,  $f(x)$  creciente en  $[0, \infty)$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ,

la imagen de  $f(x)$  sería  $[\ln 2, \infty)$ .

- b) Como  $f''(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^4} = \frac{4e^x e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0$ , se deduce que  $f(x)$  es convexa en todo  $\mathbb{R}$  y, por tanto, no hay puntos de inflexión.

Así pues, la gráfica de la función quedaría, aproximadamente, como se observa en la Figura 1.

- c) Como hemos visto, el dominio de  $f_1(x)$  es  $(-\infty, 0]$  y su imagen es  $[\ln 2, \infty)$ .

Por otro lado, el dominio de  $f_2(x)$  es  $[0, \infty)$  y su imagen es  $[\ln 2, \infty)$ .

Por tanto, el dominio de  $f_1^{-1}(x)$  es  $[\ln 2, \infty)$  y su imagen es  $(-\infty, 0]$ .

Así pues, por simetría respecto a la diagonal principal,  $f_1^{-1}(x)$  es decreciente y tiene como asíntota oblicua  $y = -x$ , acercándose a ella desde arriba.

Igualmente, por simetría respecto a la diagonal principal,  $f_2^{-1}(x)$  es creciente y tiene como asíntota oblicua  $y = x$ , acercándose a ella desde abajo.

Conclusión: las gráficas de las funciones inversas serán aproximadamente como se observa en la Figura 2

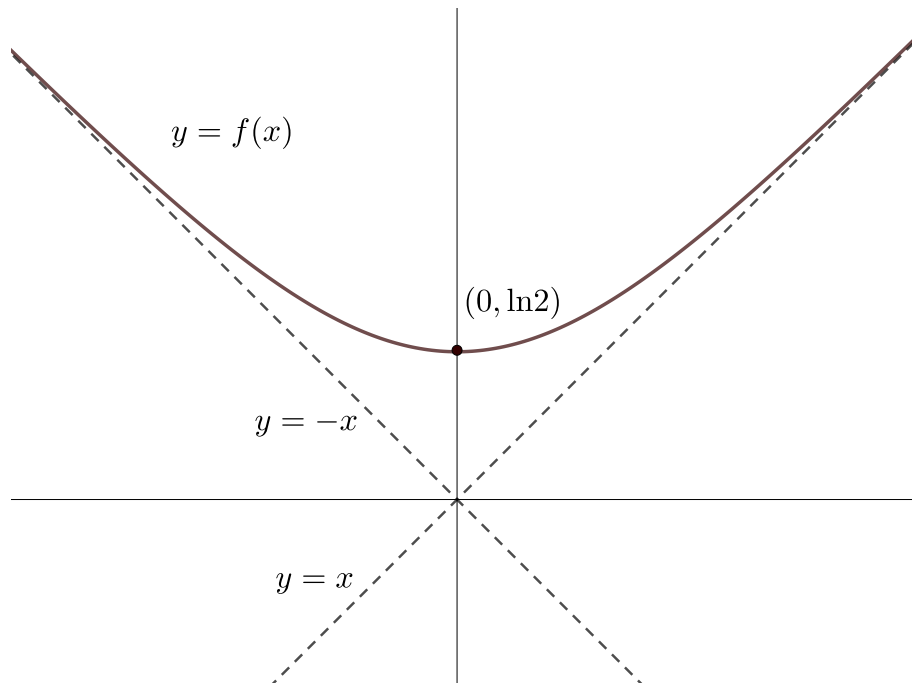


FIGURA 1. Representación de la función.

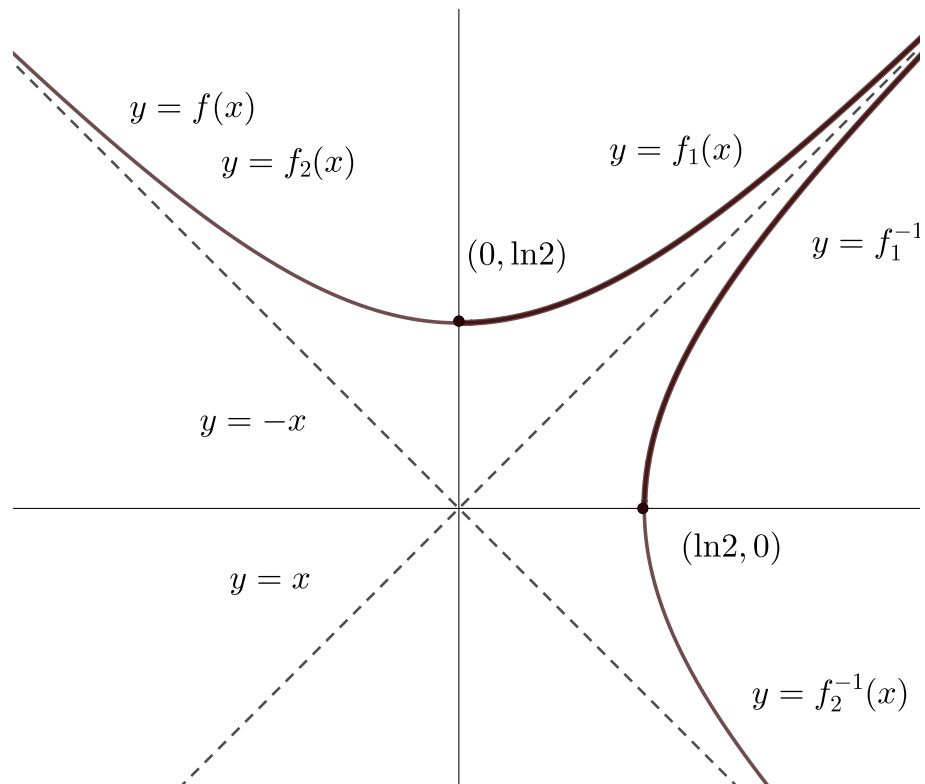


FIGURA 2. Representación de la función inversa.

(2) Supongamos que la ecuación  $e^{y-2} + y - 4x = -1$ , define de forma implícita la función  $y = f(x)$  en un entorno del punto  $x = 1, y = 2$ . Se pide:

- Hallar la recta tangente y el polinomio de Taylor de orden 2 de  $f$  en  $a = 1$ .
- Representar, aproximadamente, la gráfica de  $f$  cerca del punto  $x = 1$ .
- Sea  $\delta > 0$  suficientemente pequeño. Calcular aproximadamente los valores de  $f(1-\delta)$  y  $f(1+\delta)$  utilizando la recta tangente y el polinomio de Taylor de orden 2. Comparar dichas aproximaciones con los valores exactos de  $f(1-\delta)$  y  $f(1+\delta)$ .

**0,4 puntos apartado a); 0,3 puntos apartado b); 0,3 puntos apartado c).**

a) Para hallar la recta tangente derivamos la ecuación  $F^\sim(x) = F(x, y = f(x)) = -1$ :

$$y'e^{y-2} + y' - 4 = y'(e^{y-2} + 1) - 4 = 0$$

sustituyendo  $x = 1, y(1) = 2$  se deduce que  $y'(1) = f'(1) = 2$ .

Luego la ecuación de la recta tangente sería:  $y = P_1(x) = 2 + 2(x - 1) = 2x$ .

Análogamente, calculamos la derivada segunda de la ecuación  $F^\sim(x) = -1$ :

$$y''(e^{y-2} + 1) + (y')^2 e^{y-2} = 0$$

sustituyendo  $x = 1, y(1) = 2, y'(1) = 2$  se deduce que  $y''(1) = f''(1) = -2$ .

Luego el polinomio de Taylor de orden 2 sería:  $P_2(x) = 2x - (x - 1)^2$ .

b) Utilizando la recta tangente, el polinomio de Taylor de la función hallado en a) y observando que la función es localmente cóncava en el punto,  $f''(1) < 0$ , la gráfica de la función cerca del punto  $(1, 2)$  será, aproximadamente, así (Figura 3):

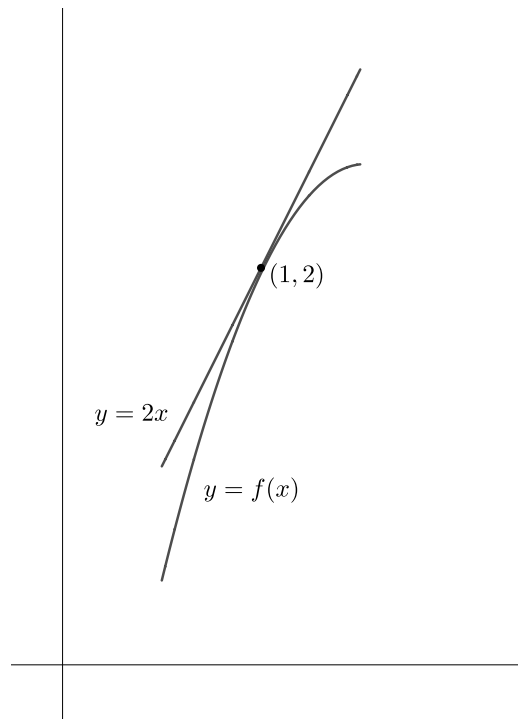


FIGURA 3. Representación local de la función en el punto  $(1, 2)$ .

c) Utilizando la recta tangente, los valores aproximados de  $f(1-\delta)$  y  $f(1+\delta)$  serán  $2 - 2\delta$  y  $2 + 2\delta$ , respectivamente. Por la concavidad de  $f(x)$  en  $(1-\delta, 1+\delta)$ , dichos valores serán MAYORES que el valor exacto de la función en dichos puntos. Por otro lado, utilizando el polinomio de Taylor de orden 2, los valores aproximados de  $f(1-\delta)$  y  $f(1+\delta)$  serán  $2 - 2\delta - \delta^2$  y  $2 + 2\delta - \delta^2$ , respectivamente. Dichos valores serán una mejor aproximación al valor exacto de la función en dichos puntos, pero no podemos saber si son mayores o menores que el valor exacto sin calcular una derivada de orden superior de la función implícita.

**ANEXO SOLUCIONES PARA LOS PROBLEMAS 1 Y 2**

(3) Sea  $C(x) = 9 + 2x + x^2$  la función de costes y  $p(x) = 14 - 2x$  la función inversa de demanda de una empresa monopolista. Se pide:

- (a) Hallar el nivel de producción para el que se maximiza el beneficio.
- (b) Hallar el nivel de producción para el que se minimiza el coste medio.
- (c) El gobierno quiere aumentar la producción hallada en a), así que se propone a la empresa producir al nivel hallado en b). ¿Cual será la reacción de la empresa?
- (d) El gobierno está inseguro sobre la reacción de la empresa en el caso c), así que propone hacerse cargo de todos los costes. ¿Aumentará así la producción?

**0,3 puntos apartado a); 0,3 puntos apartado b); 0,2 puntos apartado c); 0,2 puntos apartado d).**

---

a) En primer lugar, calculamos la función de beneficios.

$$B(x) = (14 - 2x)x - (9 + 2x + x^2) = -3x^2 + 12x - 9$$

Si calculamos la primera y segunda derivada de  $B$  :

$$B'(x) = -6x + 12; B''(x) = -6 < 0$$

luego vemos que  $B$  tiene un único punto crítico en  $x^* = 2$  y, como  $B$  es una función cóncava, este punto crítico es el único maximizador global.

b) Como la función de costes medios es  $\frac{C(x)}{x} = \frac{9}{x} + 2 + x$ , su derivada sería:  $\left(\frac{C(x)}{x}\right)' = -\frac{9}{x^2} + 1 = 0 \iff x = 3$ , único punto crítico válido.

Como  $\left(\frac{C(x)}{x}\right)'' = \frac{18}{x^3} > 0$ , la función es convexa y el punto crítico sería minimizador global.

c)  $B(3) = 0$ . Luego la empresa estará indiferente entre producir o no.

d) En este caso,  $B(x) = (14 - 2x)x$ , es decir, la función de ingresos de a).

Si calculamos la primera y segunda derivada de  $B$ :  $B'(x) = 14 - 4x$ ;  $B''(x) = -4 < 0$  luego vemos que  $B$  tiene un único punto crítico en  $x^+ = 3,5$  y, como  $B$  es una función cóncava, este punto crítico es el único maximizador global.

Por tanto, la empresa aumentará su producción.

**ANEXO SOLUCIONES PARA LOS PROBLEMA 3**

(4) Sea  $h(x) = xe^{2x-1} + 8(x-1)^3$ . Se pide:

(a) Enunciar el teorema de los ceros de Bolzano para  $h(x)$  en  $[a, b]$ .

(b) Estudiar cuantos ceros tiene la función  $h(x)$  en toda la recta real.

Sugerencia para b): representar las funciones  $f(x) = xe^{2x-1}$  y  $g(x) = -8(x-1)^3$  y considerar por separado los casos  $x < 0$  y  $x > 0$

(c) Hallar un cero de la función  $h(x)$  con un error menor que  $1/4$ .

**0,2 puntos apartado a); 0,5 puntos apartado b); 0,3 puntos apartado c).**

---

a) Las hipótesis, o condiciones iniciales, son que  $h$  sea continua en  $[a, b]$  y que  $h(a) \cdot h(b) < 0$ .

La tesis, o conclusión, es que existe  $c \in (a, b)$  tal que  $h(c) = 0$ .

b) Estudiar los ceros de  $h(x) = f(x) - g(x) = 0 \iff f(x) = g(x)$ , es decir, es equivalente a encontrar cuántas veces se cortan las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$ .

$f(x) \leq 0$  si  $x \leq 0$ , mientras que  $g(x) \geq 8$  si  $x \leq 0$ . Luego  $h(x) = f(x) - g(x) < 0$  si  $x \leq 0$ .

Por otro lado,  $f(x)$  y  $g(x)$  son funciones continuas en los reales,  $f(0) = 0 < g(0) = 8$ ,  $f(x)$  es creciente en  $[0, \infty)$ , y  $g(x)$  decreciente en ese mismo intervalo (de hecho,  $g(x)$  es decreciente en toda la recta real).

Además,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$ .

Por tanto, las gráficas de  $f(x)$  y  $g(x)$  tienen un único punto de corte en  $x^*$ . Dicho punto de corte es el cero de la función  $h(x)$ .

c) Observando el dibujo y tomando valores:  $h(0) = f(0) - g(0) = -8 < 0$ ,  $h(1) = f(1) - g(1) = e > 0$ , así que el cero de  $h(x)$  está en el intervalo  $(0, 1)$ . Por otro lado,  $h(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - g(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} < 0$ ,  $h(1) > 0$  así que el cero de  $h(x)$  está en el intervalo  $(\frac{1}{2}, 1)$ .

Por tanto, podemos tomar como cero de  $h(x)$  el valor  $\frac{3}{4}$  con un error menor que  $\frac{1}{4}$ .

La Figura 4 clarifica la situación.

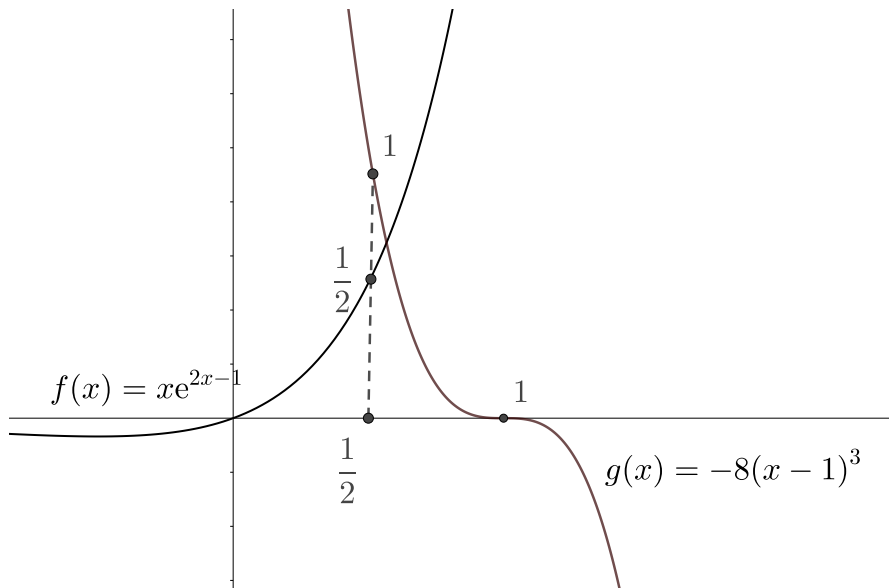


FIGURA 4. Representación de las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$ .

(5) Sean las funciones  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por:  $f(x) = (4-x)e^{2x}$ ,  $g(x) = -\sqrt{2x+1}$ , se pide:

- Representar el conjunto  $A$  delimitado por las gráficas de  $f(x)$ ,  $g(x)$  y las rectas  $x=0, x=4$ .
- Hallar, si existen, los maximales y minimales, máximo y mínimo de  $A$ .
- Calcular el área del conjunto dado.

*Sugerencia para b:* el orden de Pareto viene dado por:  $(x_0, y_0) \leq_P (x_1, y_1) \iff x_0 \leq x_1, y_0 \leq y_1$ .

**0,4 puntos apartado a); 0,2 puntos apartado b); 0,4 puntos apartado c)**

- a) En primer lugar, observamos que la gráfica de  $f(x)$  siempre es positiva o igual a cero y  $g(x)$  negativa en el intervalo  $[0, 4]$ ,

luego  $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, g(x) \leq y \leq f(x)\}$ .

A continuación, como  $f'(x) = (7-2x)e^{2x}$ , se deduce que:

$f'(x) > 0$  si  $x \in (0, 7/2)$ , luego  $f(x)$  es creciente en  $[0, 7/2]$ .

$f'(x) < 0$  si  $x \in (7/2, 4)$ , luego  $f(x)$  es decreciente en  $[7/2, 4]$ .

Obviamente,  $g(x)$  es decreciente en  $[0, 4]$ . Por tanto, el dibujo de  $A$  sería, como se aprecia en la Figura 5:

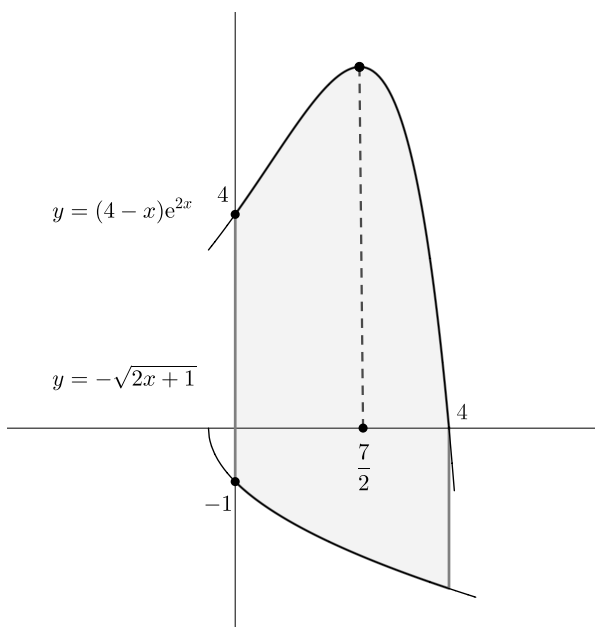


FIGURA 5. Representación del conjunto  $A$ .

- b) Así pues, el orden de Pareto nos describe al conjunto así:  
 máximo( $A$ ) no existe; maximales( $A$ ) =  $\{(x, f(x)) : 7/2 \leq x \leq 4\}$ .  
 mínimo( $A$ ) no existe; minimales( $A$ ) =  $\{(x, g(x)) : 0 \leq x \leq 4\}$ .
- c) En primer lugar, por la posición de las funciones, sabemos que:

$$\text{Área}(A) = \int_0^4 (f(x) - g(x)) dx.$$

Calculemos la primitiva de  $f(x) - g(x)$ . En primer lugar, integrando por partes:

$$\int x e^{2x} dx = [\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g] = x(e^{2x}/2) - \int 1 \cdot (e^{2x}/2) dx = x e^{2x}/2 - e^{2x}/4.$$

Y como:  $\int 4e^{2x} dx = 2e^{2x}$ , se deduce que:

$$\int f(x) dx = \int (4-x)e^{2x} dx = \frac{9}{4}e^{2x} - x e^{2x}/2.$$

$$\text{Por otro lado, como } -\int g(x) dx = \int \sqrt{2x+1} dx = \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2},$$

por la regla de Barrow, se deduce que:

$$\begin{aligned} \text{Área}(A) &= \left[ \frac{9}{4}e^{2x} - x e^{2x}/2 + \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2} \right]_0^4 = \\ &= \frac{9}{4}e^8 - 4e^8/2 + \frac{1}{3}(8+1)^{3/2} - \left[ \frac{9}{4} + \frac{1}{3}(1)^{3/2} \right] = \\ &= \frac{1}{4}e^8 + 9 - \left[ \frac{9}{4} + \frac{1}{3} \right] = \frac{1}{4}e^8 + \frac{77}{12} \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$

