UC3M

Temas de Matemáticas Avanzadas para la Economía

Final, 13 de enero de 2025 **RESUELTO**

1

(a) (5 puntos) Encuentra la solución general de la ecuación en diferencias

$$x_{t+2} - 2x_{t+1} + 4x_t = 0.$$

Nota: $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

(b) (5 puntos) Encuentra una solución particular de la ecuación en diferencias

$$x_{t+2} - 2x_{t+1} + 4x_t = t + 1.$$

(c) (5 puntos) Encuentra la solución del problema de valores iniciales

$$x_{t+2} - 2x_{t+1} + 4x_t = t + 1, \quad x_0 = \frac{2}{3},\ x_1 = \frac{2}{3}.$$

Solución:

(a) La ecuación característica es $r^2 - 2r + 4 = 0$, que tiene soluciones $r_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{4-16}}{2} = 1 \pm i\frac{2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm i\sqrt{3}$. El módulo es $|r_{1,2}| = \sqrt{1+3} = 2$ y el argumento de r_1 2s $\theta = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$. Luego
$x_t = 2^t\left(C_1\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + C_2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}t\right)\right)$.

(b) Tomamos la solución particular $At + B$, donde las constantes desconocidas A y B se obtienen de

$$A(t+2) + B - 2A(t+1) - 2B + 4At + 4B = t + 1,$$

hallando $A = B = \frac{1}{3}$. Luego $x_t = 2^t\left(C_1\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + C_2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}t\right)\right) + \frac{1}{3}t + \frac{1}{3}$.

(c) $\frac{2}{3} = C_1 + \frac{1}{3}$, luego $C_1 = \frac{1}{3}$
$\frac{2}{3} = C_1 + C_2\sqrt{3} + \frac{2}{3}$, luego $C_2 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$.
La solución particular es
$x_t = 2^t\left(\frac{1}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) - \frac{1}{3\sqrt{3}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}t\right)\right) + \frac{1}{3}t + \frac{1}{3}$

$\boxed{2}$

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

donde a y b son parámetros.

(a) (5 puntos) Determina los valores propios de A.

(b) (5 puntos) ¿Para qué valores de los parámetros a, b es la matriz A diagonalizable?

(c) (5 puntos) Para los valores $a = \frac{1}{2}$ y $b = 1$, determina una matriz diagonal D y una matriz P tales que $P^{-1}AP = D$.

Solución:

(a) $p_A(\lambda) = (a - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0$ tiene soluciones a, 2 y -1.

(b) Caso (i): si $a \neq 2$ y $a \neq -1$, entonces A es diagonalizable, dado que A tiene tres valores propios distintos.

Caso (ii): si $a = 2$, entonces el valor propio 2 es doble. La matriz $A - 2I_3$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

que tiene rango 1 sii $b = 4$.

Caso (iii): si $a = -1$, entonces el valor propio -1 es doble. La matriz $A + I_3$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

que tiene rango 1 sii $b = 1$.

Resumen: A es diagonalizable sii $a \neq \pm 1$, o $a = 2$ y $b = 4$, o $a = -1$ y $b = 1$.

(c) $a = \frac{1}{2}$ indica que estamos en el Caso (i).

$u \in S(2)$ si $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} u = 0$. Es decir, $x = 0$ y $z = 2y$. Tomando $y = 1$, obtenemos $(0, 1, 2)$.

$u \in S(\frac{1}{2})$ si $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{5}{2} & 2 \\ 2 & -2 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} u = 0$. Es decir, $x - \frac{5}{2}y + 2z = 0$, $2x - 2y + \frac{5}{2}z = 0$. Eliminando x de ambas ecuaciones, $-3y - \frac{3}{2}z = 0$, r $y = \frac{z}{2}$. Tomando $z = 1$, obtenemos $(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 1)$.

$u \in S(-1)$ si $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} u = 0$. Es decir, $(0, 2, 1)$.

Luego podemos tomar

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; D = \mathrm{diag}(2, \tfrac{1}{2}, -1).$$

$\boxed{3}$

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \\ z_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Notar que la matriz del sistema es la matriz A del Problem 2 anterior, cuando $a = \frac{1}{2}$ y $b = 1$.

(a) (5 puntos) Encontrar el punto estacionario (o punto de equilibrio) del sistema y estudiar su estabilidad (estable, asintóticamente estable, inestable, punto de silla), encontrando la variedad estable si existe.

(b) (5 puntos) Hallar la solución general del sistema.

Solución:

(a) El punto estacionario es solución del sistema lineal de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rclllll} x & = & \frac{x}{2} & & & +1 \\ y & = & x & -2y & +2z & \\ z & = & 2x & -2y & +3z & +2 \end{array} \right.$$

El punto estacionario es $(2, -4, -7)$.

Hemos visto en el Problema 2 que la matriz del sistema tiene valores propios $\frac{1}{2}$, 2 y -1. El punto es inestable, ya que no todos los valores propios son menores que uno en valor absoluto, pero es un punto de silla. La variedad estable es $S(\frac{1}{2})$, que fue determinada en el Problema 2 como la recta dada por las ecuaciones $\left\{ \begin{array}{l} x - \frac{5}{2}y + 2z = 0 \\ 2x - 2y + \frac{5}{2}z = 0 \end{array} \right.$.

(b) Se ha determinado en el Problema 2 anterior que la matriz A es diagonalizable, lo que nos permite escribir la solución general en la forma

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} = C_1 2^{-t} \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 2^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3 (-1)^t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

donde C_1, C_2 y C_3 son constantes arbitrarias. Los vectores propios fueron computados en el problema anterior (ver la solución del Caso (i) del apartado (b) y sustituir el valor $a = \frac{1}{2}$ and $b = 1$), y el punto de equilibrio en el apartado (a) de este problema.

$\boxed{4}$

Se considera la EDO

$$2tx' + x = t^2 \quad t \neq 0$$

(a) (5 puntos) Encontrar la solución general.

(b) (5 puntos) Encontrar la solución del problema de valores iniciales

$$2tx' + x = t^2, \quad x\,(25) = 126$$

¿Cuál es el intervalo de definición?

Solución:

(a) Vamos a buscar una solución en la forma $x = uv$. Tenemos $x' = u'v + uv'$ y por tanto

$$2tv(t)u'(t) + 2tu(t)v'(t) + u(t)v(t) = t^2$$

Elegimos u tal que

$$2tv'(t) + v(t) = 0$$

que es un ecuación separable. La solución es $v = \frac{1}{\sqrt{|t|}}$ for $t \neq 0$. Con esta selección, la EDO es simplemente $2\sqrt{|t|}u'(t) = t^2$, es decir, $u = \frac{|t|^{5/2}}{5} + C$, donde C es una constante arbitraria. La solución general es

$$x(t) = uv = \frac{t^2}{5} + \frac{C}{\sqrt{|t|}}, \quad t \neq 0.$$

(b) Tenemos

$$x\,(25) = 125 + \frac{c_1}{5} = 126$$

Es suficiente tomar $C = 5$. La solución es

$$x(t) = \frac{t^2}{5} + \frac{5}{\sqrt{t}}, \quad t \in (0, \infty)$$

$\boxed{5}$

(a) (5 puntos) Encontrar la solución general de la EDO

$$x'' - x' - 6x = 0$$

(b) (5 puntos) Encontrar la solución general de la EDO

$$x'' - x' - 6x = 30t + 5$$

(c) (5 puntos) Encontrar la solución del siguiente problema de valores iniciales

$$x'' - x' - 6x = 30t + 5, \quad x(0) = 4 \quad x'(0) = 2$$

(d) (5 puntos) Encontrar la solución $x(t)$ el siguiente problema de valores iniciales

$$x'' - x' - 6x = 0, \quad x(0) = 1 \quad \lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

Solución:

(a) La solución general es

$$C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t}$$

(b) Buscamos una solución particular de la forma $x_p = A + Bt$. Tenemos

$$x_p' = B \quad x_p'' = 0$$

Luego

$$x'' - x' - 6x = -6A - B - 6Bt = 30t + 5$$

Es suficiente tomar $A = 0$, $B = -5$. La solución general es

$$x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t} - 5t$$

(c) Tenemos

$$x'(t) = -2C_1 e^{-2t} + 3C_2 e^{3t} - 5$$

Luego

$$\begin{aligned} x(0) &= 4 = C_1 + C_2 \\ x'(0) &= 2 = -5 - 2C_1 + 3C_2 \end{aligned}$$

Obtenemos $C_1 = 1$, $C_2 = 3$. La solución es

$$e^{-2t} + 3e^{3t} - 5t.$$

(d) La solución general es

$$C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t}$$

Debemos tomar $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. La solución es e^{-2t}.

$\boxed{6}$

Se considera el siguiente sistema de EDOs

$$\begin{cases} x' &= -15 - 3x + 5y + xy \\ y' &= -2x + xy \end{cases}$$

(a) (5 puntos) Determinar los puntos estacionarios (o de equilibrio).

(b) (5 puntos) Determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio.

Solución:

Los puntos estacionarios son soluciones del sistema

$$\begin{cases} 0 &= -15 - 3x + 5y + xy \\ 0 &= -2x + xy \end{cases}$$

La segunda ecuación puede escribirse como $x(y-2) = 0$. Luego, puede ser $x = 0$ o $y = 2$. Las soluciones son $(-5, 2)$ y $(0, 3)$. La matriz Jacobiana del sistema es

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} y-3 & x+5 \\ y-2 & x \end{pmatrix}$$

Vemos que

- $J(-5, 2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$. Los valores propios son -1 y -5. Luego $-5, 2)$ es un nodo estable.
- $J(0, 3) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Los valores propios son $-\sqrt{5}$ y $\sqrt{5}$, luego $(0, 3)$ es un nodo inestable. Se trata de un punto de silla.