

1
---

- (a) (5 puntos) Encuentra la solución general de la ecuación en diferencias

$$x_{t+2} - 2x_{t+1} + 4x_t = 0.$$

Nota:  $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ .

- (b) (5 puntos) Encuentra una solución particular de la ecuación en diferencias

$$x_{t+2} - 2x_{t+1} + 4x_t = t + 1.$$

- (c) (5 puntos) Encuentra la solución del problema de valores iniciales

$$x_{t+2} - 2x_{t+1} + 4x_t = t + 1, \quad x_0 = \frac{2}{3}, \quad x_1 = \frac{2}{3}.$$

---

2

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

donde  $a$  y  $b$  son parámetros.

- (a) (5 puntos) Determina los valores propios de  $A$ .
  - (b) (5 puntos) ¿Para qué valores de los parámetros  $a, b$  es la matriz  $A$  diagonalizable?
  - (c) (5 puntos) Para los valores  $a = \frac{1}{2}$  y  $b = 1$ , determina una matriz diagonal  $D$  y una matriz  $P$  tales que  $P^{-1}AP = D$ .
-

3

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \\ z_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Notar que la matriz del sistema es la matriz  $A$  del Problem 2 anterior, cuando  $a = \frac{1}{2}$  y  $b = 1$ .

- (a) (5 puntos) Encontrar el punto estacionario (o punto de equilibrio) del sistema y estudiar su estabilidad (estable, asintóticamente estable, inestable, punto de silla), encontrando la variedad estable si existe.
  - (b) (5 puntos) Hallar la solución general del sistema.
-

4

Se considera la EDO

$$2tx' + x = t^2 \quad t \neq 0$$

- (a) (5 puntos) Encontrar la solución general.
- (b) (5 puntos) Encontrar la solución del problema de valores iniciales

$$2tx' + x = t^2, \quad x(25) = 126$$

¿Cuál es el intervalo de definición?

---

5

- (a) (5 puntos) Encontrar la solución general de la EDO

$$x'' - x' - 6x = 0$$

- (b) (5 puntos) Encontrar la solución general de la EDO

$$x'' - x' - 6x = 30t + 5$$

- (c) (5 puntos) Encontrar la solución del siguiente problema de valores iniciales

$$x'' - x' - 6x = 30t + 5, \quad x(0) = 4 \quad x'(0) = 2$$

- (d) (5 puntos) Encontrar la solución  $x(t)$  el siguiente problema de valores iniciales

$$x'' - x' - 6x = 0, \quad x(0) = 1 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

---

6

Se considera el siguiente sistema de EDOs

$$\begin{cases} x' &= -15 - 3x + 5y + xy \\ y' &= -2x + xy \end{cases}$$

- (a) (5 puntos) Determinar los puntos estacionarios (o de equilibrio).
  - (b) (5 puntos) Determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio.
-