UC3M Niu: ______ Grupo: ______

Temas de Matemáticas Avanzadas para la Economía

Final, 15 de enero de 2024 **Nombre:** ______

Ejercicio	1	2	3	4	5	6	Total
Puntos	15	10	10	10	15	10	70
Nota							

Instrucciones:

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h**.
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **NO DESGRAPE** el cuadernillo.
- Por favor, muestre una tarjeta de identificación válida si le es requerido por el profesor.
- Lea el examen cuidadosamente. El examen consta de 6 ejercicios, para un total de 70 puntos.
- Recuerde que el módulo del número complejo $z = a + ib$ es $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y su argumento es el ángulo θ tal que $\tan\theta = b/a$.

  Tabla de valores trigonométricos más comunes

θ	$\operatorname{sen}\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞

$\boxed{1}$

(a) (5 puntos) Halle la solución general de la ecuación en diferencias homogńea

$$x_{t+2} - x_{t+1} - 2x_t = 0.$$

(b) (5 puntos) Halle la solución general de la ecuación en diferencias no homogńea

$$x_{t+2} - x_{t+1} - 2x_t = 1 + 2^t.$$

(c) (5 puntos) Halle la solución del problema de valores iniciales

$$x_{t+2} - x_{t+1} - 2x_t = 1 + 2^t, \qquad x_0 = 0,\ x_1 = 2.$$

$\boxed{2}$

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -a^2 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix},$$

donde a es un parámetro.

(a) (5 puntos) Calcule los valores propios de A. ¿Para qué valores del parámetro a es la matriz A diagonalizable?

(b) (5 puntos) Para los valores de a determinados en el apartado (a) anterior, halle una matriz D y una matriz inversible P tales que $P^{-1}AP = D$.

$\boxed{3}$

Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones en diferencias:

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \\ z_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^2 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde a es un parámetro. Observar que la matriz del sistema es la matriz A estudiada en el Problema 2.

(a) (5 puntos) Encontrar los puntos de equilibrio o estacionarios del sistema. Para los valores de a para los que la matriz del sistema es diagonalizable (estos valores se han determinado en el Problema 2 anterior), estudiar si el punto de equilibrio es asintóticamente estable.

(b) (5 puntos) Para los valores de a para los que la matriz del sistema es diagonalizable (estos valores se han determinado en el Problema 2 anterior), hallar la solución general del sistema.

$\boxed{4}$

Se considera la EDO

$$t^3x' + 2t^2x = 1,$$

(a) (5 puntos) Encontrar la solución general.

(b) (5 puntos) Encontrar la solución del problema de valores iniciales

$$t^3x' + 2t^2x = 1, \quad x(-1) = 2$$

¿Cuál es el intervalo de definición de la solución?

$\boxed{5}$

(a) (5 puntos) Encontrar la solución general de la EDO

$$x'' + 6x' + 9x = 0$$

(b) (5 puntos) Encontrar la solución general de la EDO

$$x'' + 6x' + 9x = 6e^{-3t}$$

(c) (5 puntos) Econtrar la solución del problema de valores iniciales

$$x'' + 6x' + 9x = 6e^{-3t}, \quad x(0) = 1 \quad x'(0) = -1$$

$\boxed{6}$

Se considera el siguiente sistema de EDOs:

$$\begin{cases} x' &= x^2y - \frac{x^2}{16} - 25y + \frac{25}{16} \\ y' &= xy - 4y \end{cases}$$

(a) (5 puntos) Halles los puntos estacionarios o de equilibrio.

(b) (5 puntos) Estudie la estabilidad de los puntos de equilibrio.
